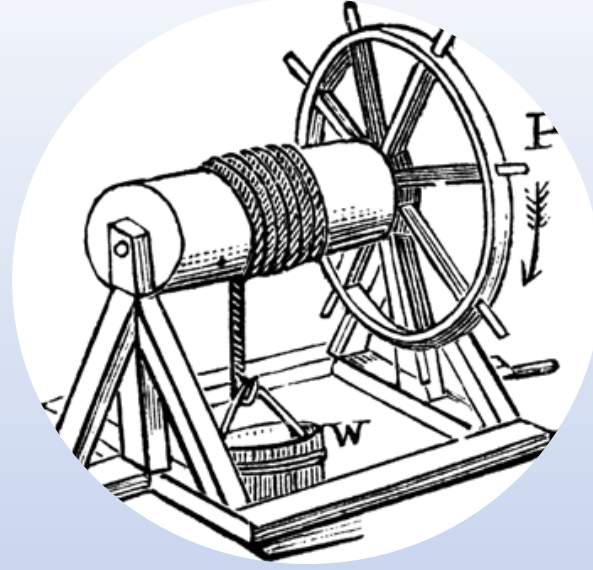
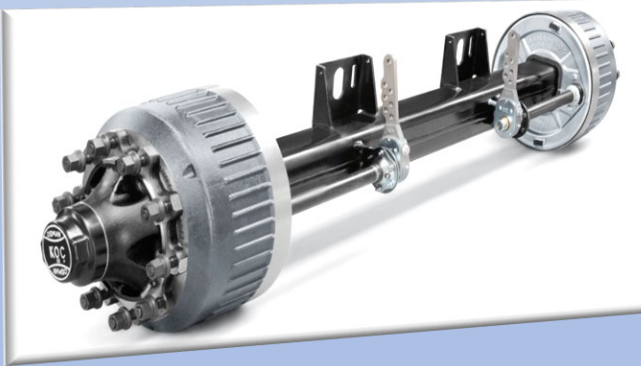




AKSLAR & MİLLER



Prof.Dr. Ali ORAL

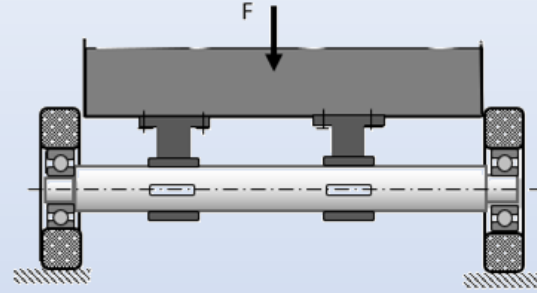
Akslar ve miller yapı (şekil) bakımından benzer elemanlar olup , ancak üstlendikleri görevler açısından farklı olan elemanlardır.

Akslar; teker , makara gibi duran ve ya dönen makine elemanlarını taşıyan bu elemanlara gelen kuvvetler etkisinde sadece eğilmeye ve kesmeye zorlanan elemanlardır.

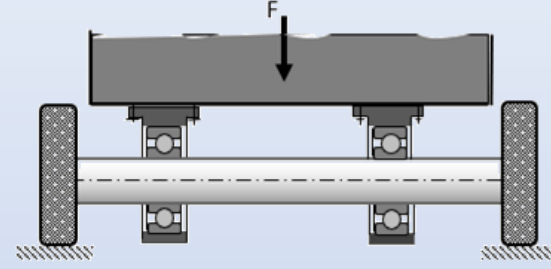
Aks sabit ve ya döner aksa şeklinde olabilir.

Konstrüksiyonlarda zorunlu olmadıkça aksın sabit olması (dayanım açısından) tercih edilir.

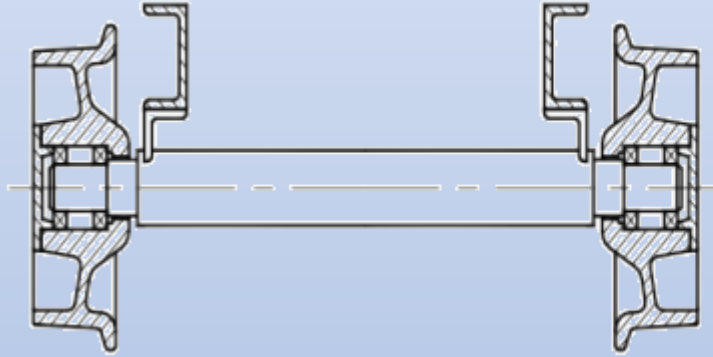
Bir römork tekerinin konstrüksiyonunda bu uygulamaya ait örnek tasarım şekli verilmiştir.



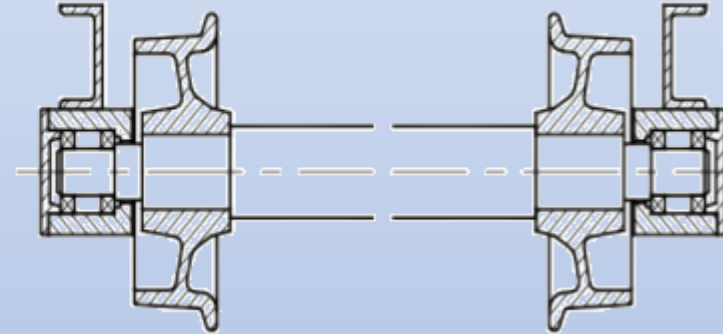
Sabit Ak



Döner Aks



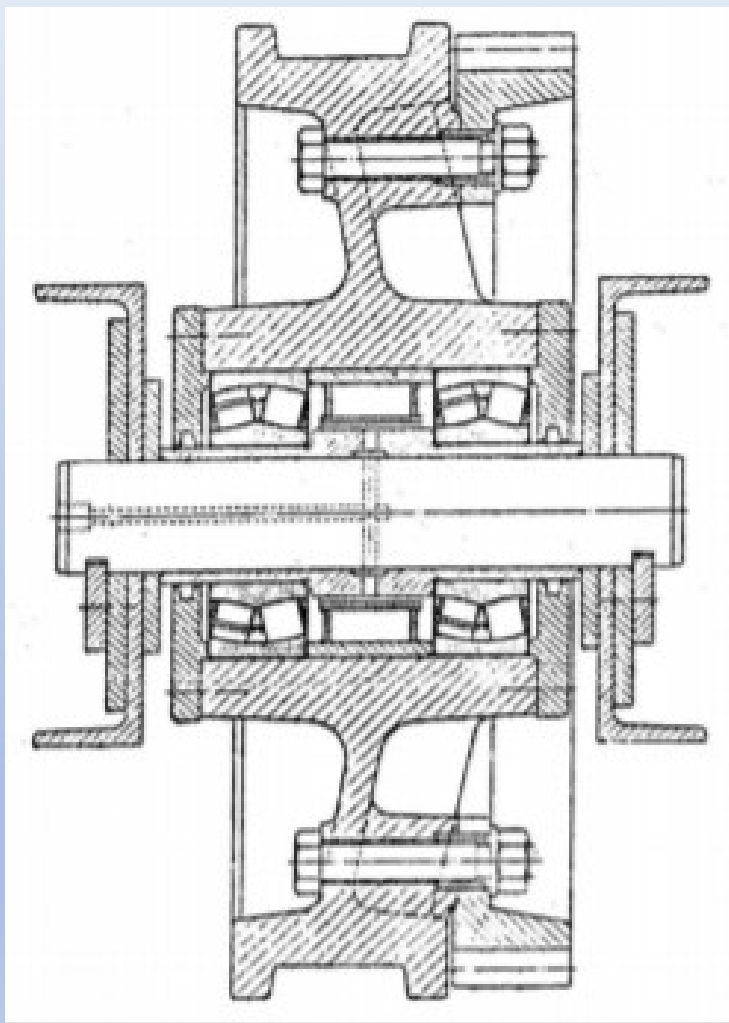
Sabit Aks



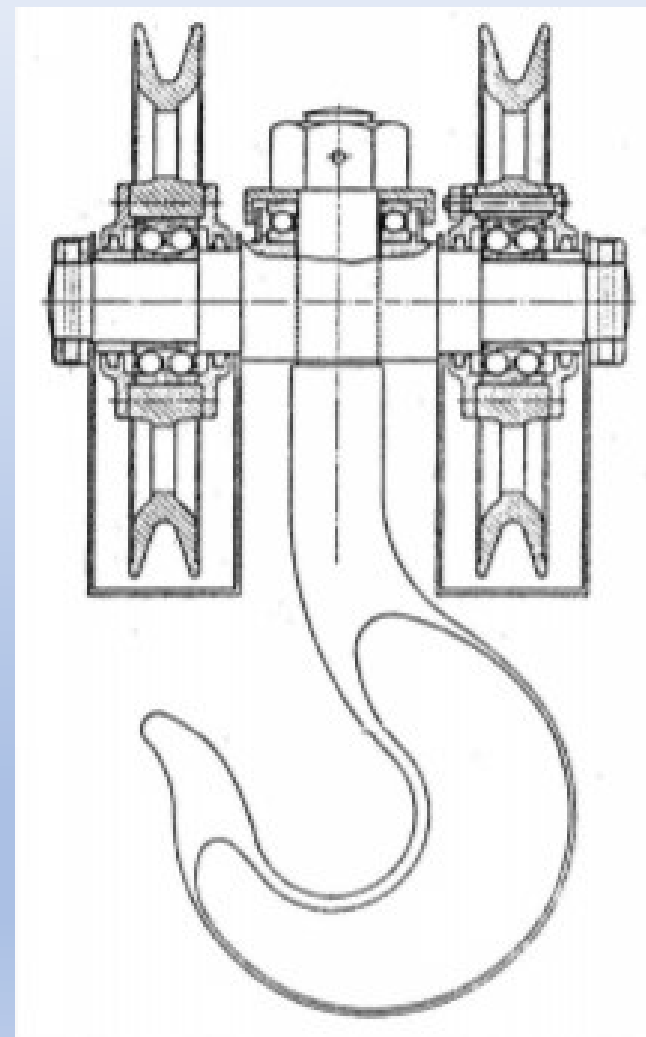
Döner Aks

Birinci konstrüksiyonda teker aksı sabit olduğundan, aksa etkiyen gerilmeler (eğilme ve kesme) **statik** olur.

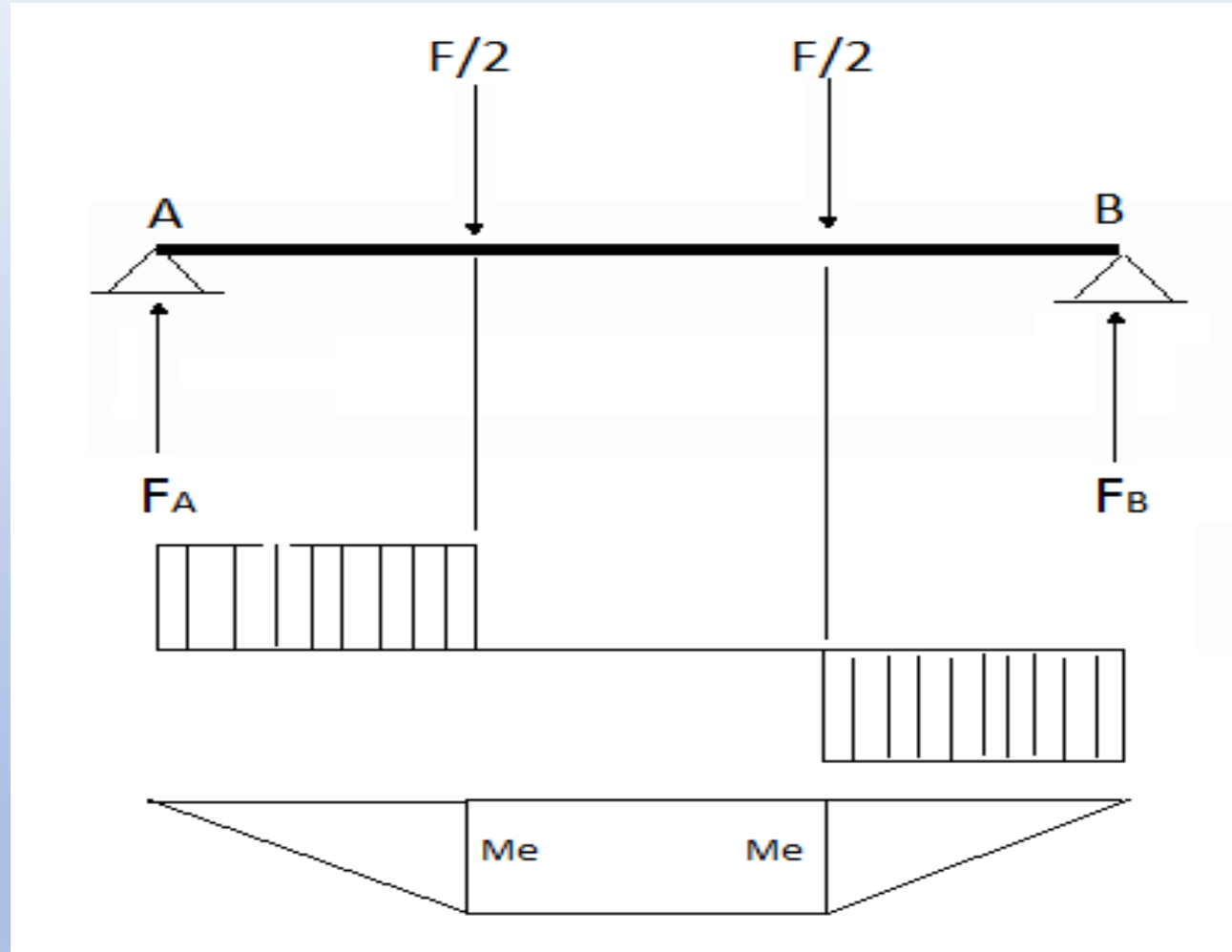
Kren tekeri Aks?-Mil?



Kanca Bloğu Aks?-Mil?



Eğilme zorlanmasına göre aks çapı ;



$$\sigma_e = \frac{M_e}{W} \leq \sigma_{em} \quad \frac{M_e}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq \frac{\sigma_{AK}}{S}$$

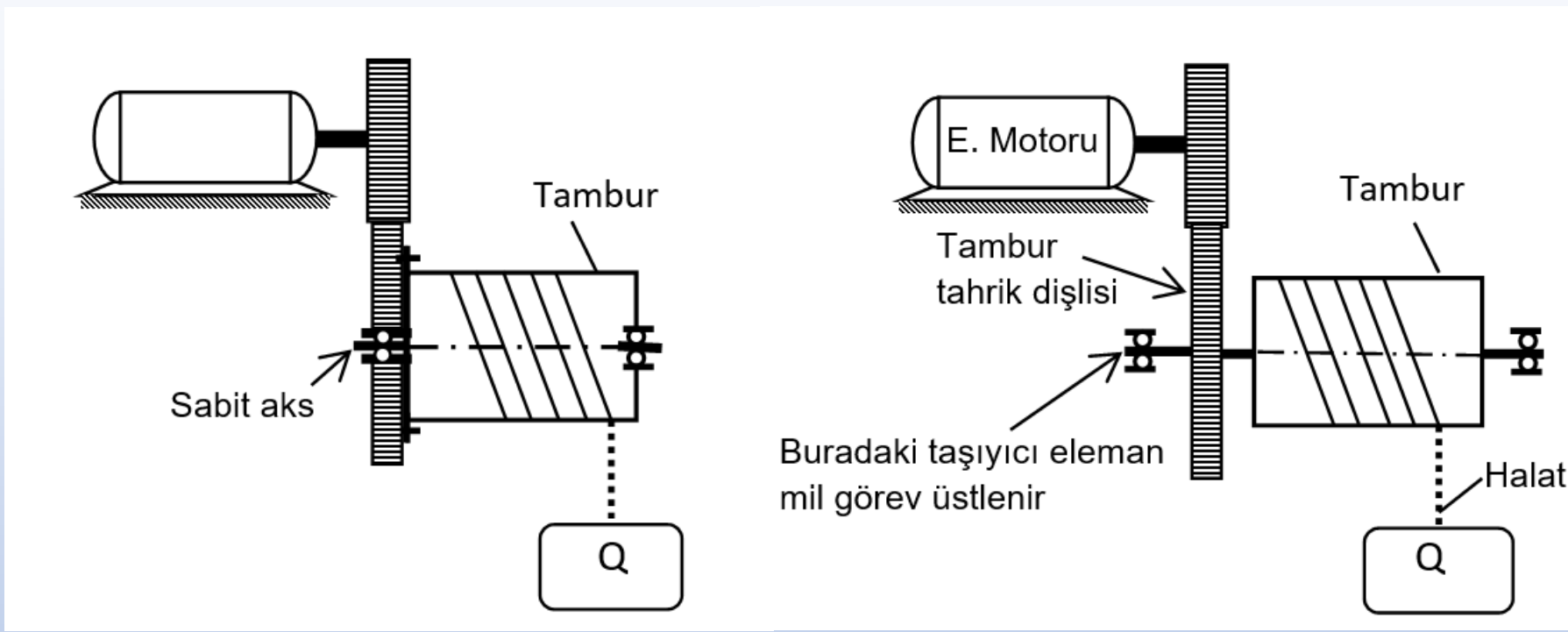
Döner aksta eğilme gerilmesi değişken (**dinamik**)
olacağından aks çapı ;

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 * M_e * S}{\pi * \sigma_{TD}}} \text{ olur .}$$

$\sigma_{TD} < \sigma_{AK}$ olduğundan döner aks çapının daha büyük olması gerekir.

Miller; dişli , kasnak , teker vb elemanları taşıyan ; eğilme ve kesilmeye zorlanmanın yanında dönme momenti ilettikleri için ayrıca burulmaya zorlanan elemanlardır.

Konstrüksiyonlarında dikkat edilmesi gereken hususlardan birisi de taşıyıcı eleman olarak kullanılacak bir aksın hatalı bir tasarımla mil görevi üstlenmesidir. Aşağıda şematik resmi çizilmiş bir yük kaldırma mekanizmasında doğru ve yanlış uygulamaya ait iki örnek verilmiştir.



Birinci şekilde tambur ve tahrik dişlisini taşıyan eleman sabit bir aks görevi üstlenmişken, ikinci şekilde eleman dönmek ve dönme momenti iletmek görevini de üstlenmektedir. Dolayısıyla mil olarak görev yapmaktadır. Yanlış olan bu konstrüksiyonda mil dinamik zorlamanın yanında ayrıca burulmaya da maruz kalmaktadır.

Aks ve millerin
boyutlandırılması ile ilgili
mukavemet hesapları

Güz Döneminde

verildiğinden burada tasarımla
ilgili diğer hususlara
değinilecektir.

ŞEKİLLENDİRME

Aksların ve millerin şekillendirilmesi ve boyutlandırılmasında istenen prensipler aynı olduğundan miller için verilecek bilgiler akslar içinde geçerli olacaktır.

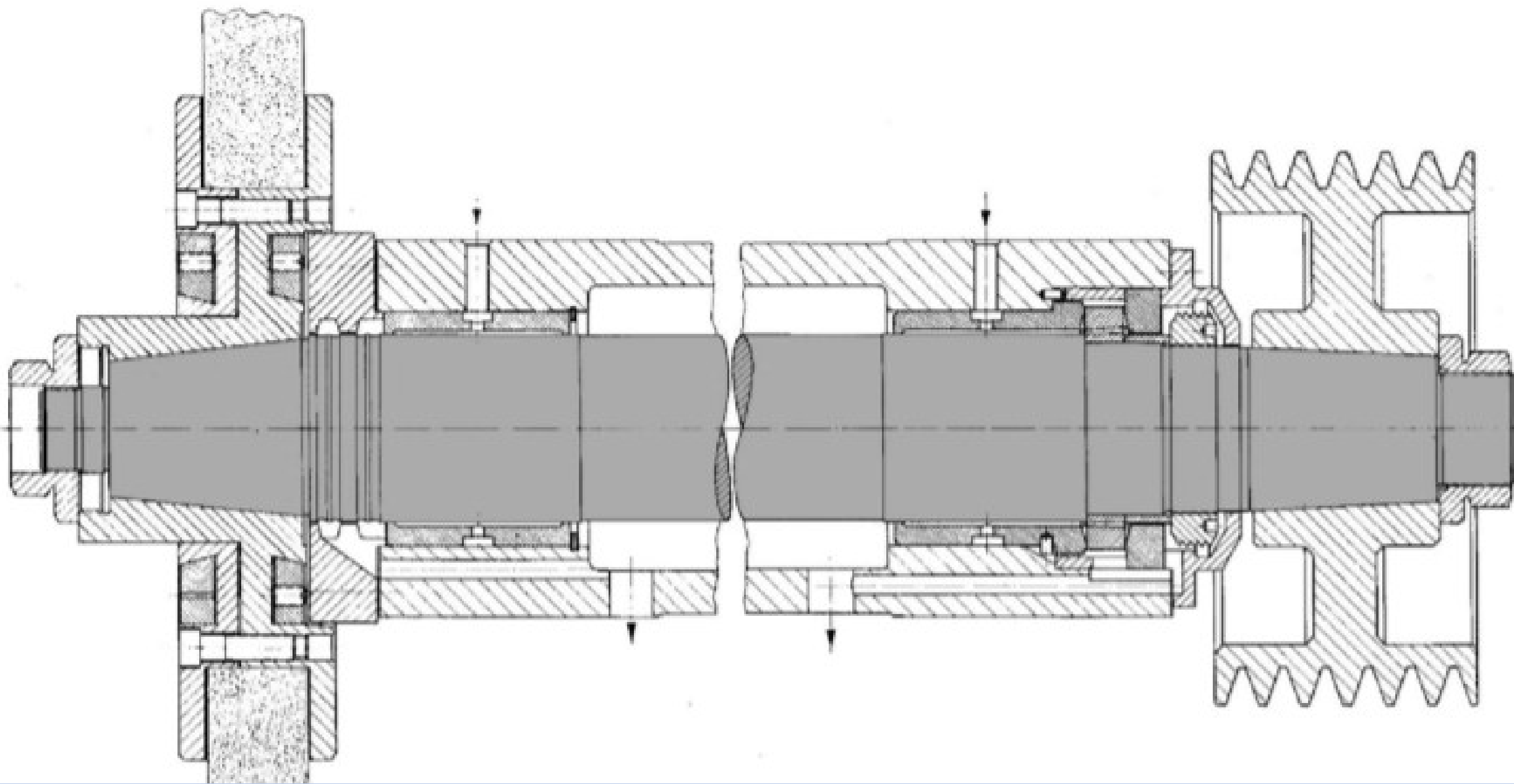
Miller Şekil Açısından ;

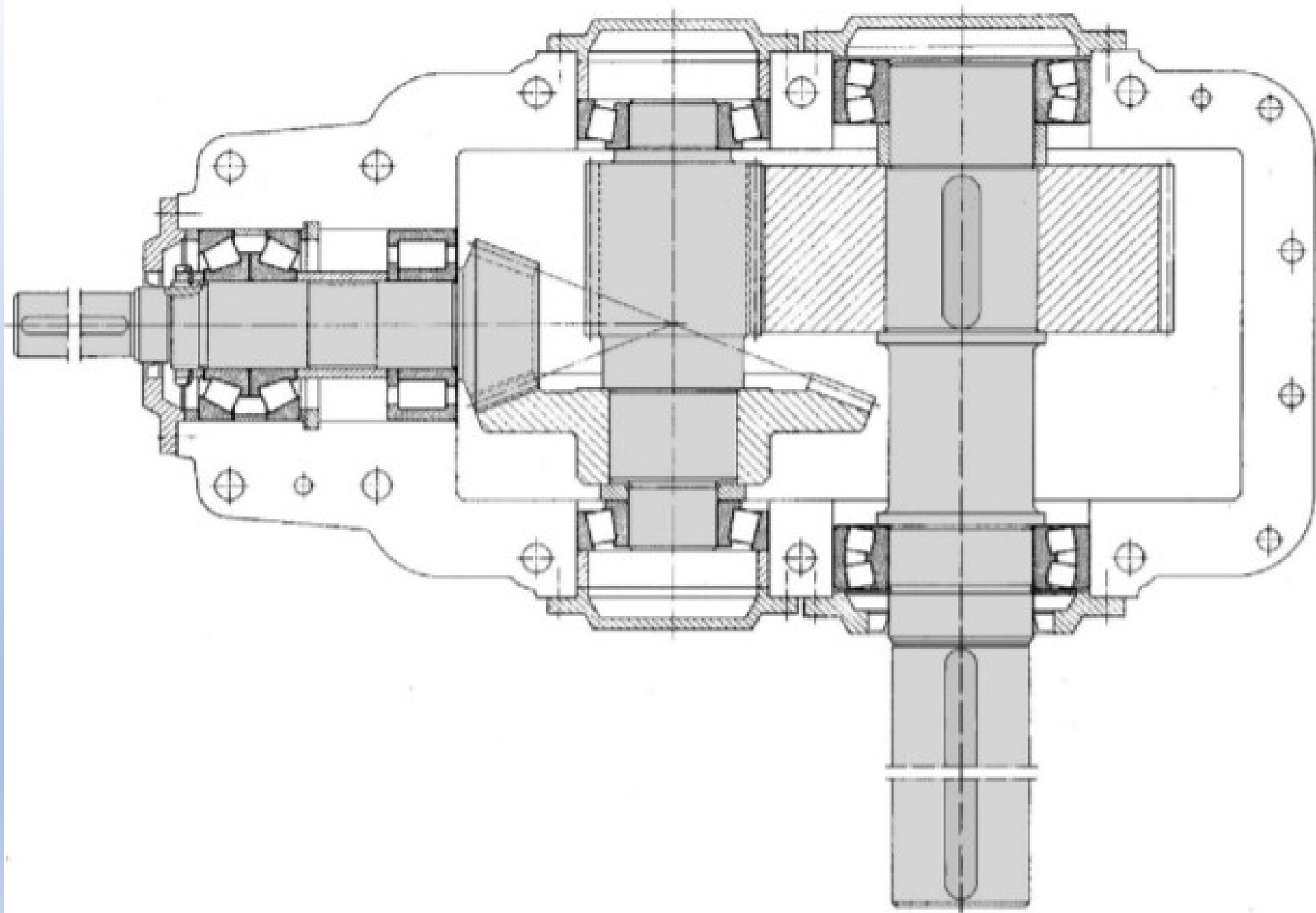
Düz , faturalı , içi boş , krank , kam , mafsallı ve esnek miller olarak sınıflandırılabilirler.

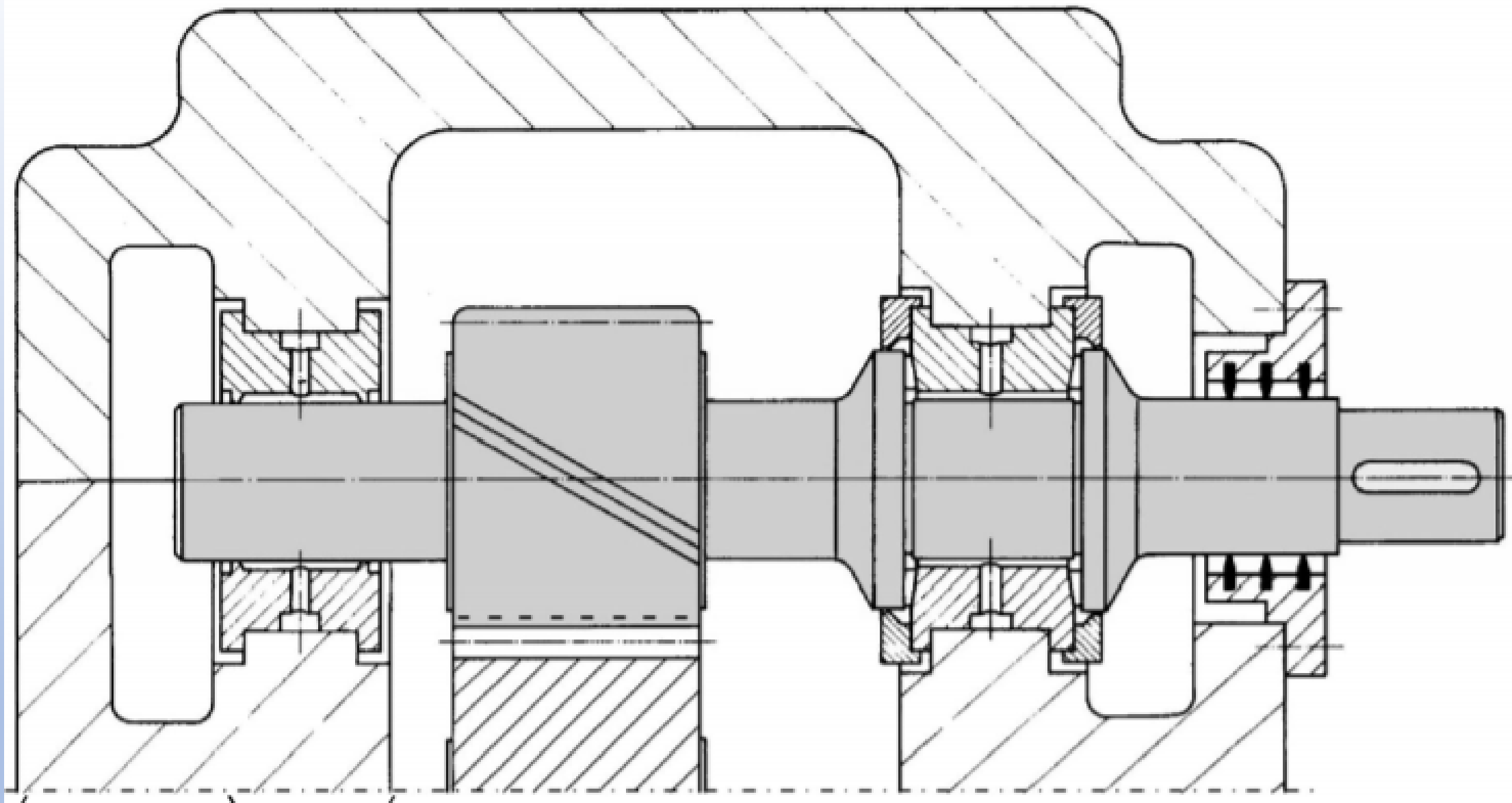
Düz Miller

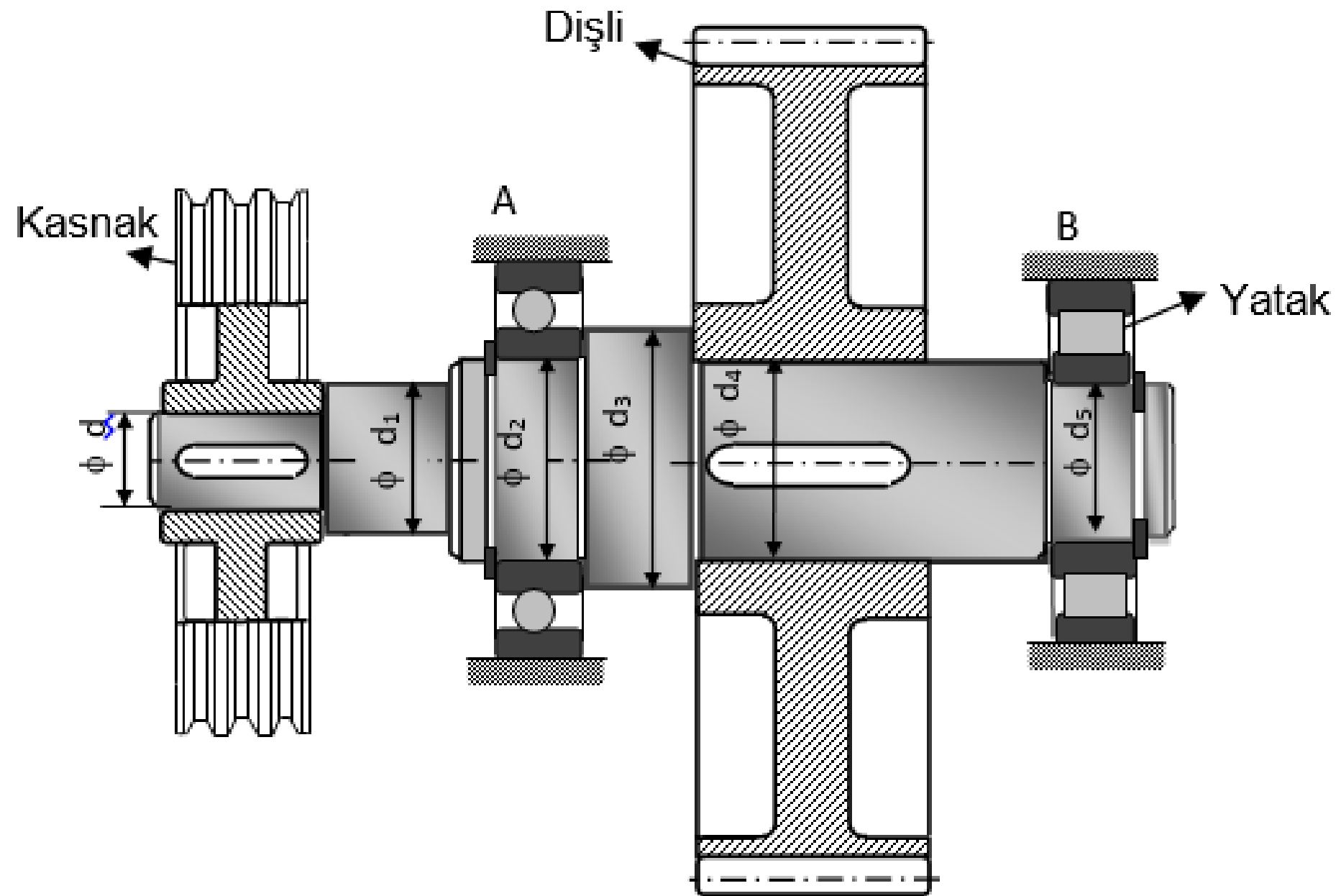
Bir uçtan diğerine çapı değişmeyen millerdir. Basit makinelerin dışında pek kullanılmayan ve boyutlandırılması kolay olan millerdir.

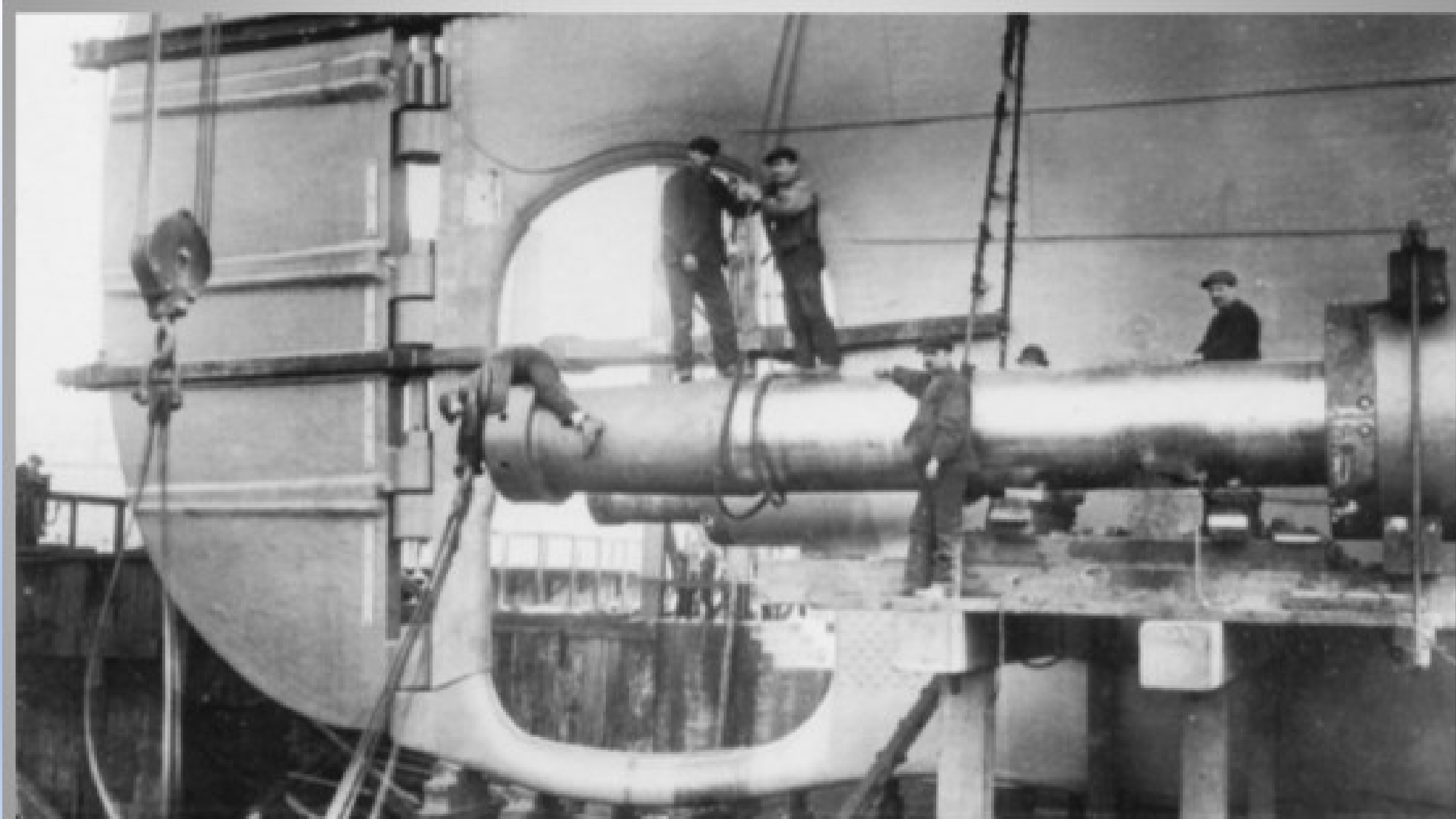


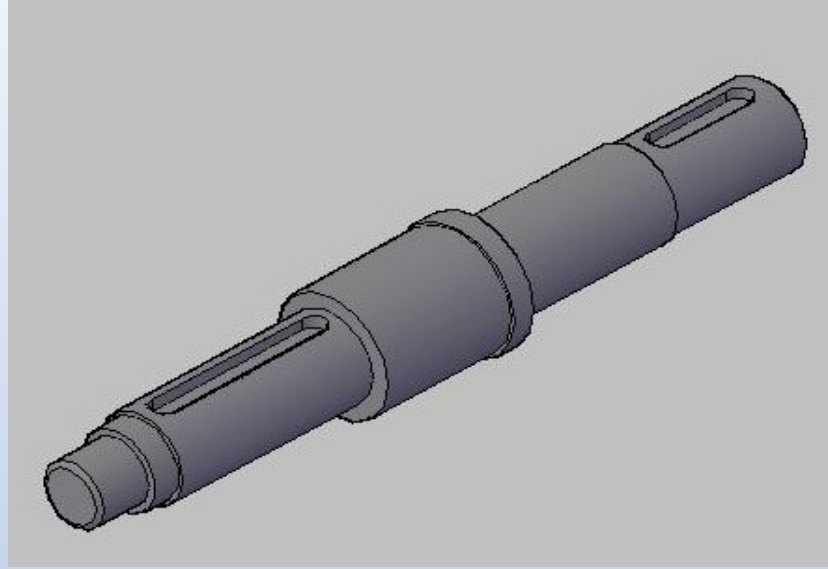












Bu miller taşıdıkları dişli , kasnak vb elemanların aksenel yönde konumlarının tespiti için omuzlara (faturalara) sahiptirler.

Mile desteklik görevi yapan ve etkiyen kuvvetleri gövdeye ileten yatakların montajı içinde faturaya ihtiyaç duyulur. Uçlarda (muylularda) eğilme momenti sıfır olacağından çaplar küçük , ortalarda ise eğilme gerilmesinden dolayı daha büyük olacaktır.

Çapların değişmesi nedeniyle burulma gerilmesinin ve kademelerde çentik etkisinin oluşacağı dikkate alınarak boyutlandırılması gerektiği de unutulmamalıdır.

İçi Boş Miller

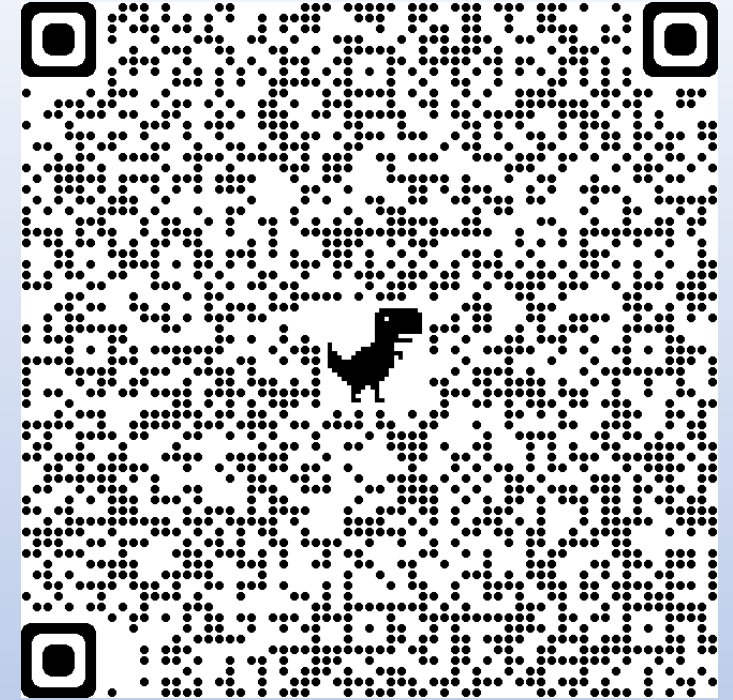
Bazı konstrüksiyonlarda fonksiyonu gereği , mili içi boş olarak kullanmak gerekir.

Torna tezgahının spindeli (Fener Mili) , yuvarlak elemanların ortasından sürülebilmesi için içinin boş olması gerekir.

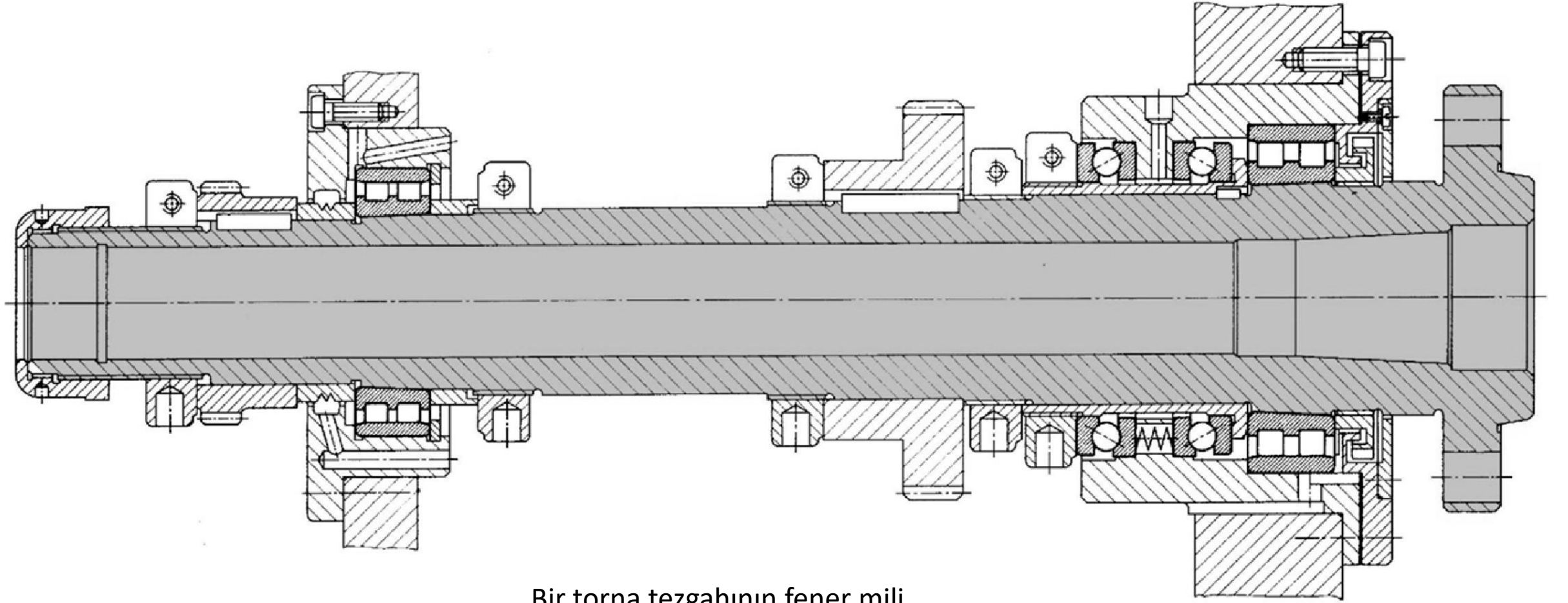
Ayrıca milin ortasının boş boru şeklinde olması ağırlığının azalması ve daha hafif olmasını sağlar. İçinin boşaltılması mukavemetinin de azalması söz konusudur .



CNC Torna Tezgahı Fener Mili

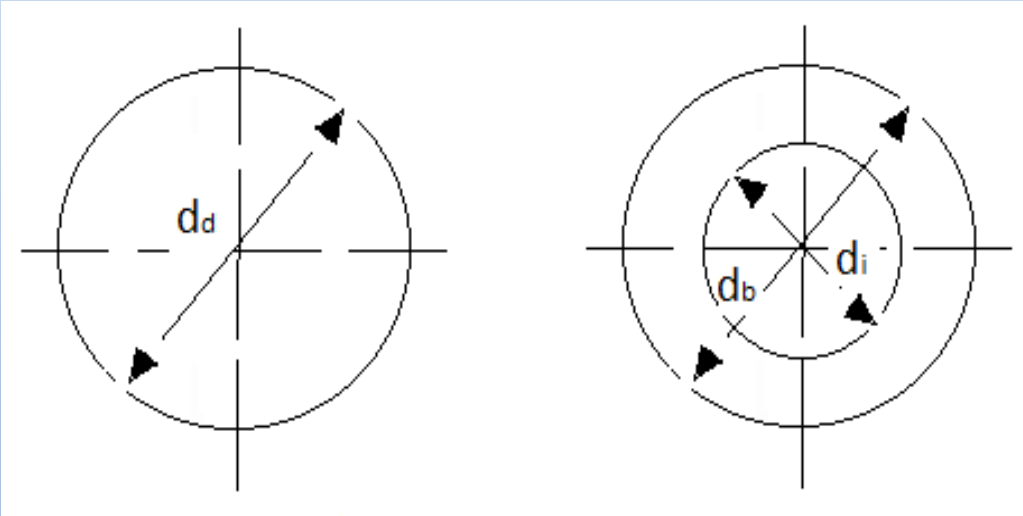


Klasik Torna tezgahı fener mili teknik resmi



Bir torna tezgahının fener mili

Milin içi boşaltıldığında mukavemeti azalır. Ancak mukavemetteki azalma oranı, ağırlık azalması oranına göre çok daha küçüktür. Aynı malzemedен yapılmış dış çapları aynı biri dolu diğeri boş iki milde;



$$A_d = \frac{\pi * d_d^2}{4}$$

$$A_b = \frac{\pi}{4} * (d_b^2 - d_i^2)$$

$$I_d = \frac{\pi * d_d^4}{64}$$

$$I_b = \frac{\pi}{64} * (d_b^4 - d_i^4)$$

$$W_d = \frac{\pi * d_d^4}{64} / \frac{d_d}{2}$$

$$W_b = \frac{\pi}{64} * (d_b^4 - d_i^4) / \frac{d_b}{2}$$

Ağırlıklar oranı ;

$$\frac{G_b}{G_d} = \frac{A_b}{A_d} * \frac{l}{l} * \frac{\rho}{\rho} * \frac{g}{g} = \frac{\frac{\pi}{4} * (d_b^2 - d_i^2)}{\frac{\pi * d_d^2}{4}} = 1 - \left(\frac{d_i}{d_d}\right)^2$$

Mukavemet momentleri oranı ;

$$\frac{W_b}{W_d} = \frac{\frac{\pi}{64} * (d_b^4 - d_i^4) / \frac{d_b}{2}}{\frac{\pi * d_d^4}{64} / \frac{d_d}{2}} = 1 - \left(\frac{d_i}{d_d}\right)^4$$

Bu oranlar $d_i = \frac{d_d}{2} = \frac{d_b}{2}$ için

$$\frac{G_b}{G_d} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,75 \quad \text{ağırlıkta \% 25 azalma}$$

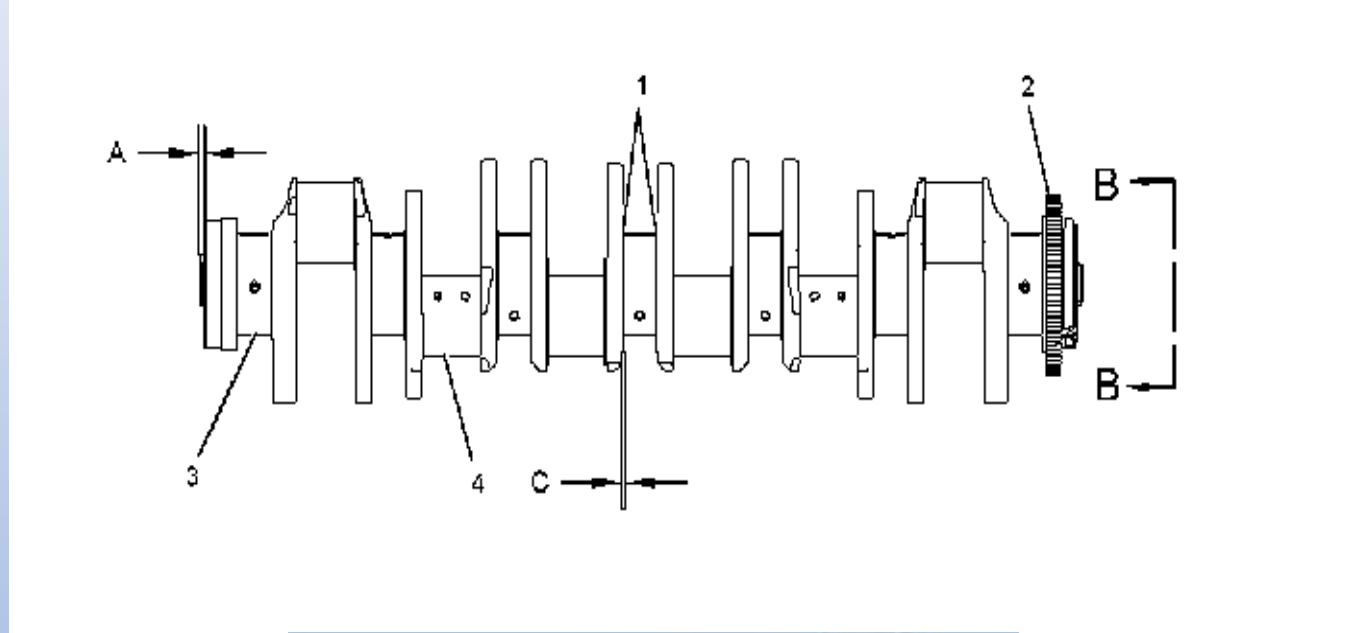
$$\frac{W_b}{W_d} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,93 \quad \text{mukavemette \% 7 azalma olur.}$$

Bu avantajdan yararlanmak için ;

1. Milin içi talaş kaldırılarak boşaltılmamalıdır. Bunun için içi boş et kalınlığı yüksek olan özel borular kullanılır.
2. Boş millerin et kalınlığı küçük olacağından kama bağlantıları için uygun olmayabilir

Krank Milleri

Krank milleri dönme hareketini öteleme hareketine ve ya ötelemeyi dönme hareketine çeviren millerdir.



Krank millerinin hesabı çok zordur. Bunun nedeni krank milinin geometrisinin karmaşıklığı , mile gelen motor kuvvetlerinin ve özellikle yüksek hızlarda atalet kuvvetlerinin tam bilinmemesi , değişken olması , milin çok noktadan yataklanmış olmasıdır .

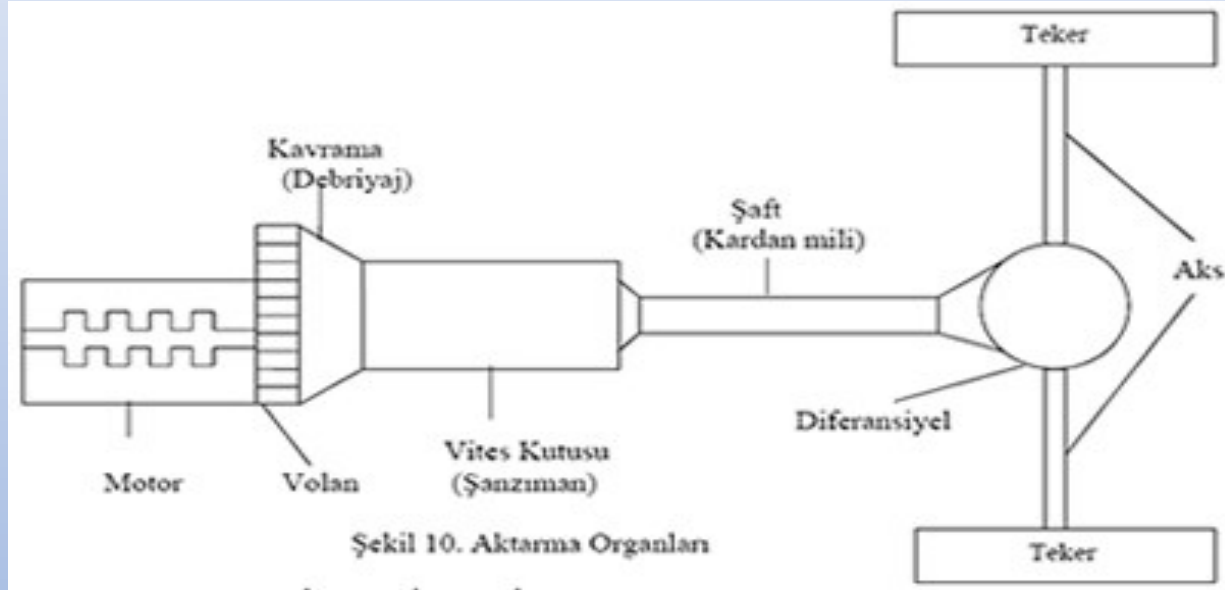
Esnek Miller

Kazan temizlemek için kullanılan döner fırçalarda , taşıt takometrelerinde , tıkanık kanalları açmak için kullanılan döner bıçaklarda , tahrik noktası ile iş noktası arasındaki geometri değişken olduğu için esnek mil kullanma zorunluluğu vardır .



Mafsallı Miller

Eksen doğrultuları birbirleriyle çakışmayıp , birbirine paralel ya da uzantıları birbiriyle kesişen iki milden diğerine moment nakli için araya mafsallı mil koymak gerekir. Motorlu taşıtlarda dişli kutusu (vites kutusu) ve aks arasında kullanılan kardan mili gibi



Şaft ve elemanları



Youtube

AKS VE MİLLERİN BOYUTLANDIRMA KRİTERLERİ

Aks ve millerin işlevlerini istenen biçimde yerine getirebilmeleri için aşağıda yazılı 3 kriterin gerçekleştirilmesi gerekir .

1. Yeterli Mukavemet – Zorlayan kuvvet ve momentler altında kırılmama
2. Yeterli Rijitlik – Eğim ve sehimin öngörülen sınırı aşmaması (şekil değiştirmeye direnç)
3. Uygun Kritik Devir – İşletme esnasında rezonans tehlikesi olmaması

Aks ve Millerde Zorlanmalar

Akslar kesme kuvveti ve eğilme momenti , miller ise kesme kuvveti , eğilme momenti ve burulma momenti ile zorlanırlar . Bu kuvvetlerin doğru hesabı gerilmelerin değişimlerinin (statik , dinamik gerilme) doğru tespiti boyutlandırmanın vazgeçilmezlerdir. Söz konusu zorlanmaların oluşturduğu gerilmelerin hesabı ayrıntılı olarak incelenmişti . (**Makine Elemanları –I**)

Ön Boyutlandırma

Bir konstrüksiyonunda milin başlangıçta bilinen (veya yaklaşık tespit edilen) boyutu uzunluğudur . Bu uzunluk mil üzerine takılacak elemanların genişlik ve birbirine göre konumları dikkate alınarak belirlenir.

Milin çapı ise etkiyen kuvvet ve momentlere bağlı olarak hesaplanır. Bu hesaplamada milin en küçük (çekirdek) çapı önce belirlenir. Bu çap genellikle milin uç kısmının çapıdır ki eğilme gerilmelerinin olmadığı , milin sadece burulmaya zorlandığı yerindeki çapıdır. Bu çap değeri aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır .

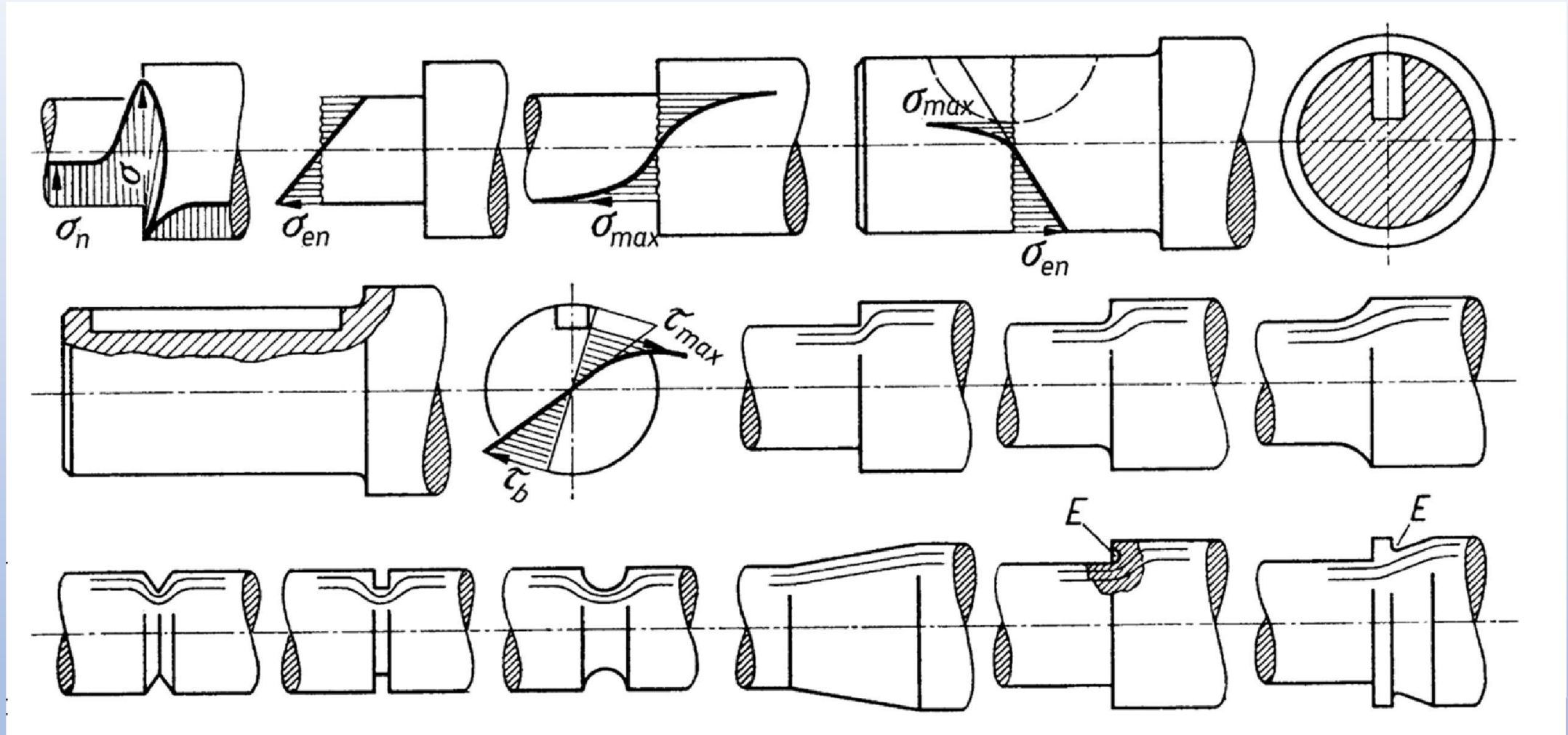
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 * M_d}{\pi * \tau_{em}}} \quad M_d = \text{iletlen dönme momenti}$$

τ_{em} = Statik zorlanmalarda τ_{AK} / S
Dinamik zorlanmalarda τ_{TD} / S alınır .

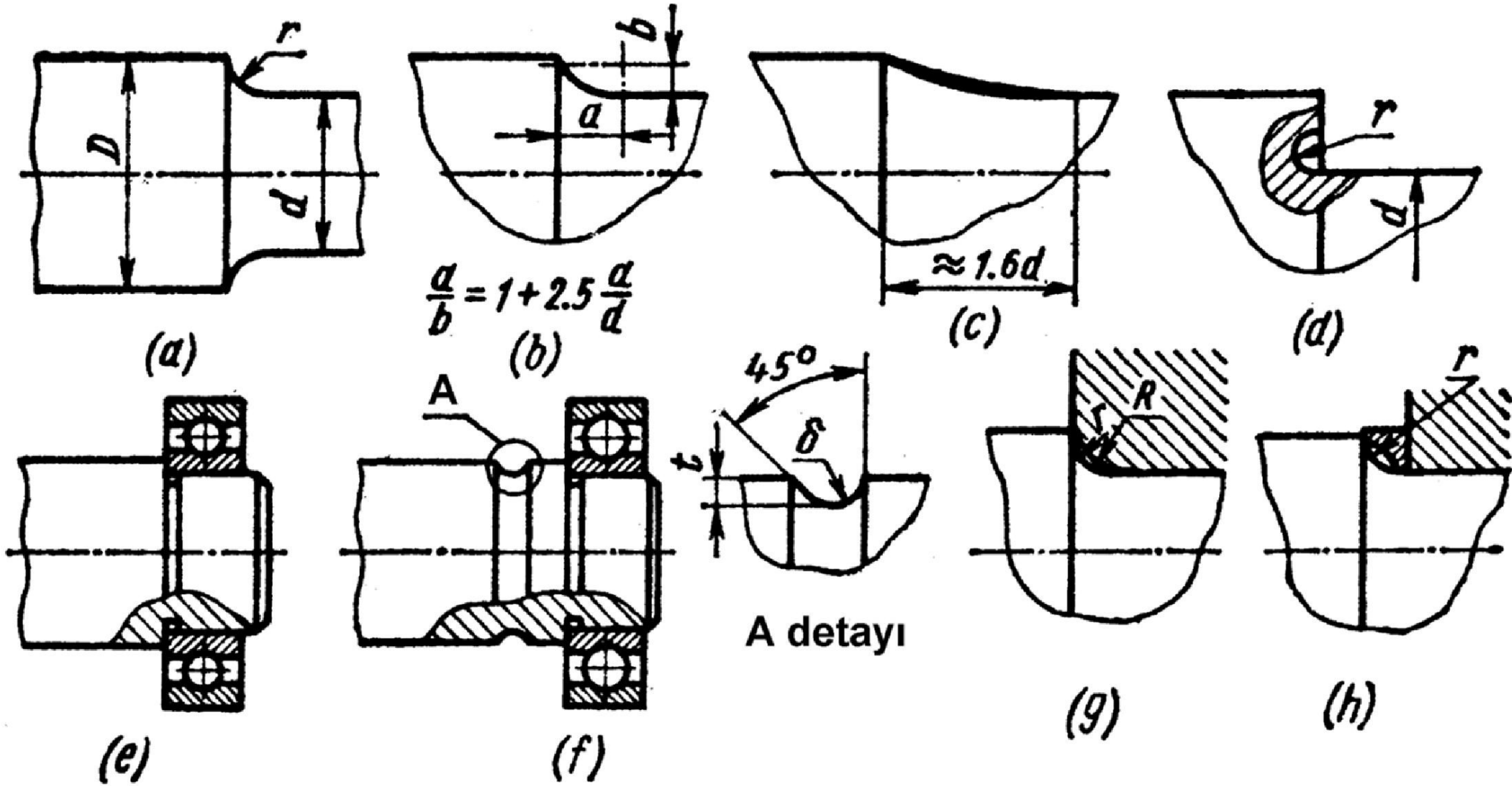
S (Dinamik zorlanmalarda 5 - 10 arasında seçilir)

S (Statik zorlanmalarda 1,5-2 arasında seçilir)

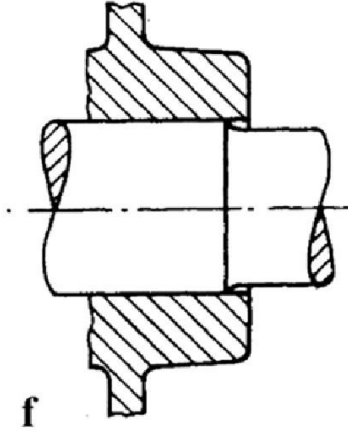
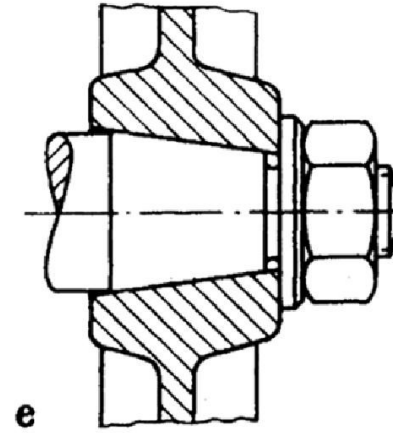
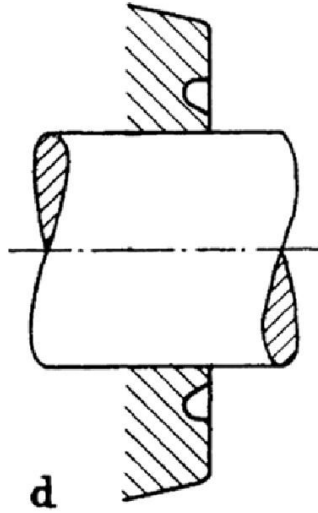
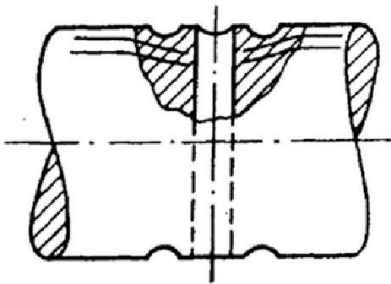
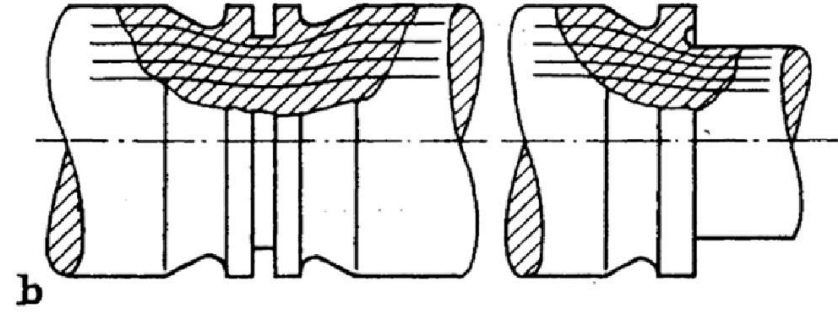
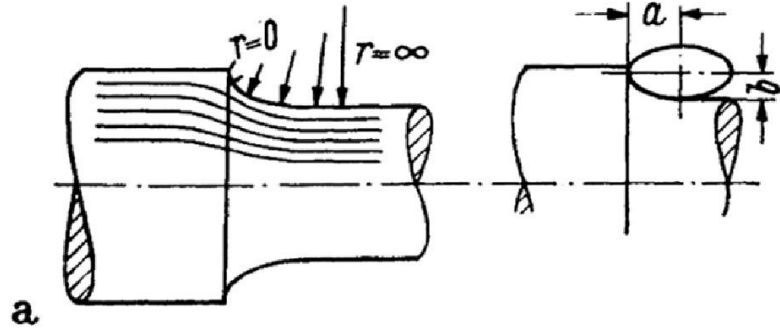
Şekillendirmede dikkat edilmesi gereken detaylar.



Makina konstrüksiyonlarında gerilme yığılması oluşturan süreksizlikler ve bu halde oluşan gerilme dağılımları:

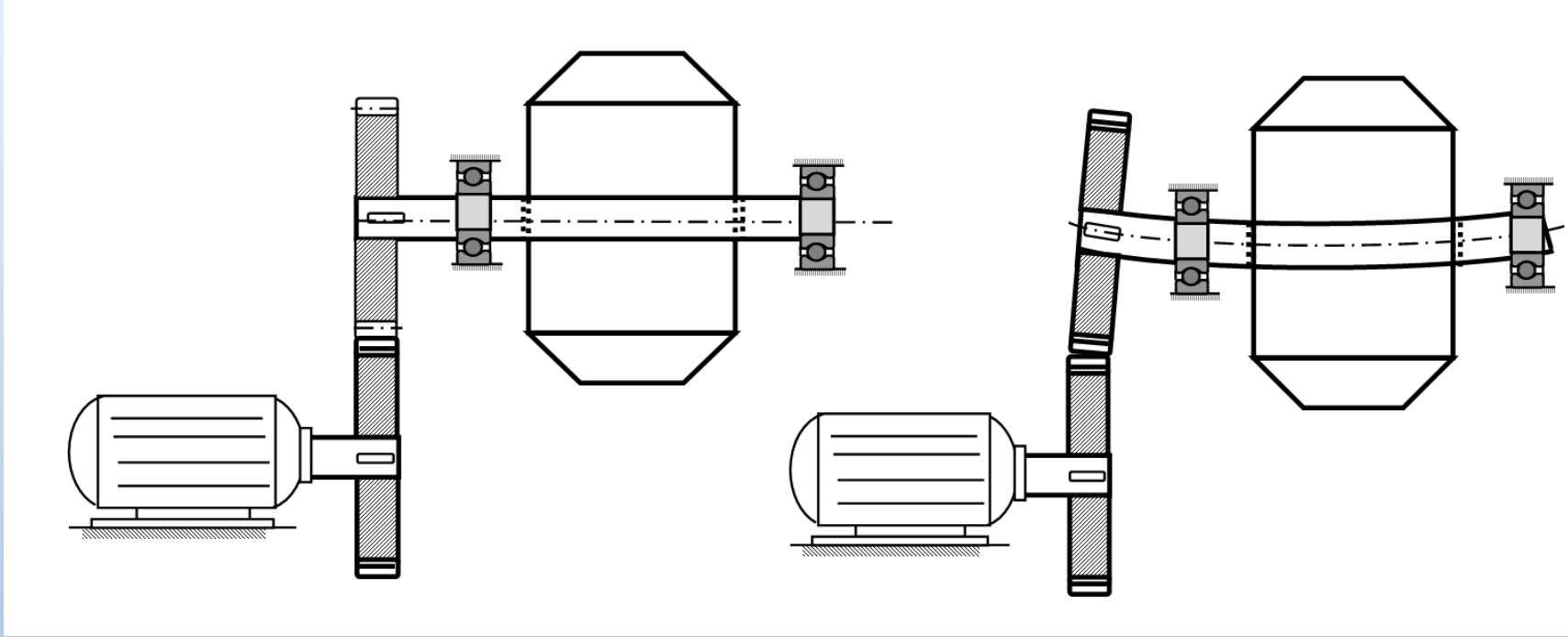


Miller ve akslarda çentik etkisini azaltmak için önerilen çözümler



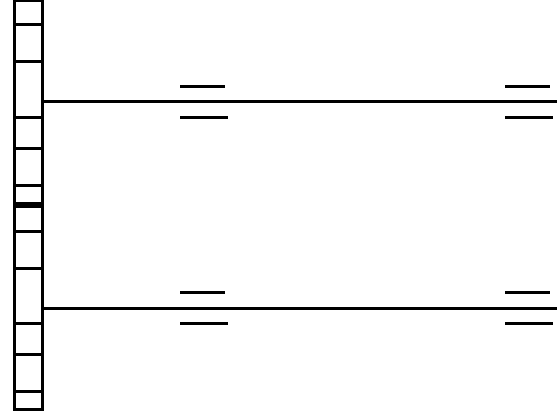
Çentik etkisinin ek çentiklerle azaltılması (a, b, c, d) ve geçmelerde oluşan gerilme yığılmalarını azaltıcı çözümler (e, f)

DEFORMASYON

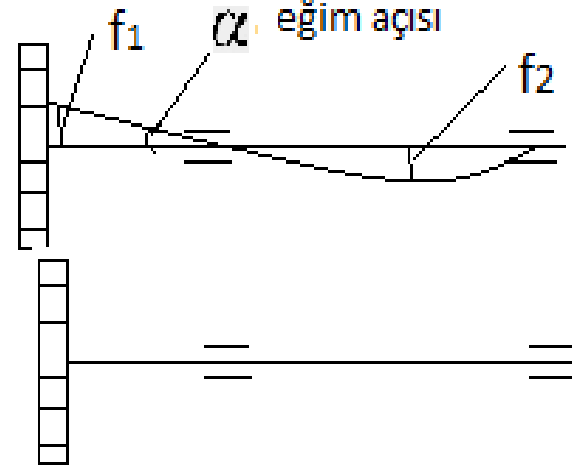


- Millerin yeterli mukavemete sahip olmasının yanında , zorlanmaların etkisinde uğrayacağı deformasyonların , eğilmede ; çökme (sehim) ve eğiminin , burulmada ; açısal şekil değiştirmenin belirli bir değeri geçmemesi istenir

Eğim ve sehimin fazla olması milin taşıdığı dişlinin karşısına gelecek dişliye düzgün temas etmeyecek , yataklarda kasılmalara sebep olacaktır .



Deforme olmamış hal



Deforme olmuş hal
 f_1 ve f_2 çökme (sehim)

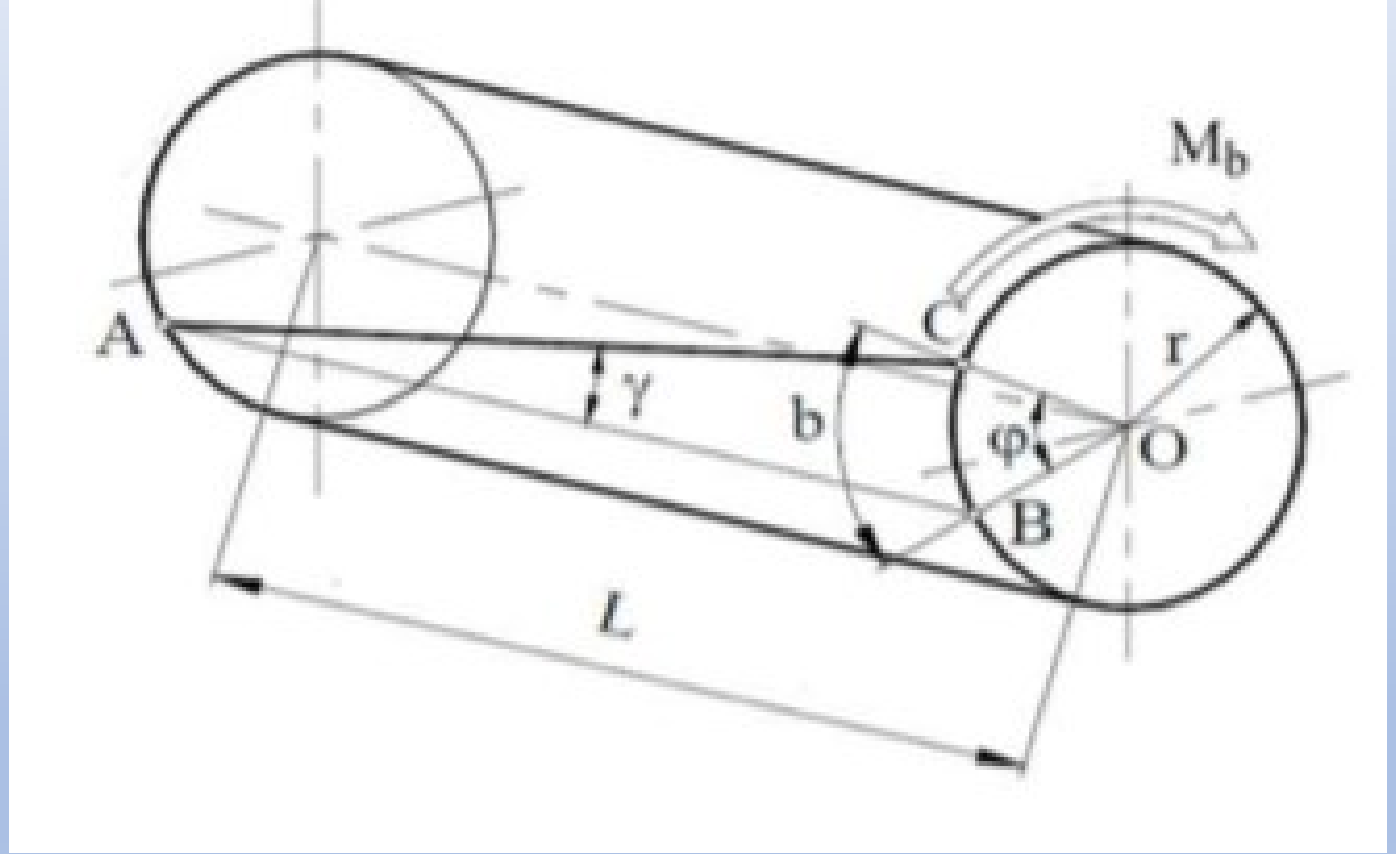
Burulma deformasyonları ise , açısal kaymalara sebep olur .

φ = Burulma açısı , γ = Kayma açısı

$$\varphi = \frac{M_d * l}{G * I_p} \text{ (radyan)}$$

$$\varphi = \frac{180}{\pi} * \frac{M_d * l}{G * I_p} \text{ (açı)}$$

$$\gamma = \frac{\varphi * r}{l}$$



Mil boyutlandırırken eğilme deformasyonlarının izin verilen değerleri aşmaması istenir . Bu deformasyonlar mil uzunluğuna bağlı olarak aşağıda verilen sınırlar arasında kalması istenir .

Genel makine konstrüksiyonlarında

$$f \leq (0,0005 - 0,003) * l$$

Orta hassasiyetteki konstrüksiyonlarda

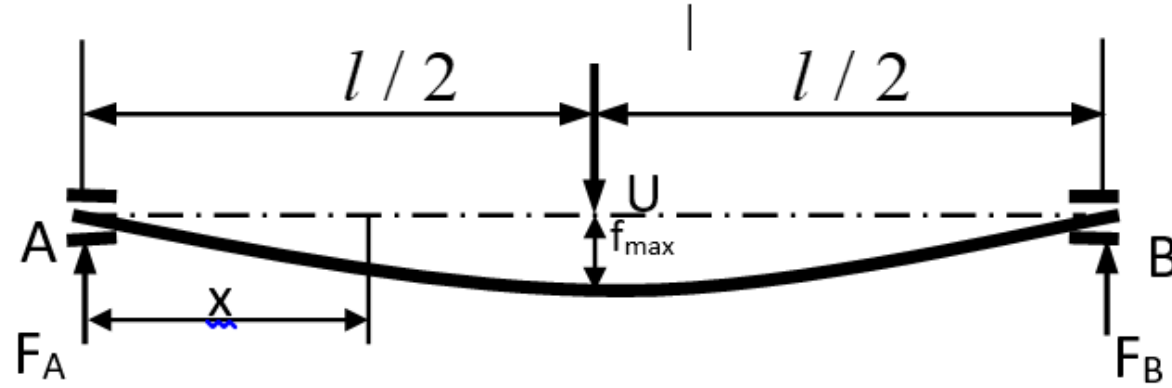
$$f \leq (0,00001 - 0,0005) * l$$

Yüksek hassasiyetteki konstrüksiyonlarda

$$f \leq (0,000001 - 0,00001) * l$$

Bazı yükleme şekilleri için çökme miktarının hesabı aşağıda verilmiştir .

İki yataklı mil- tekil kuvvet ortada



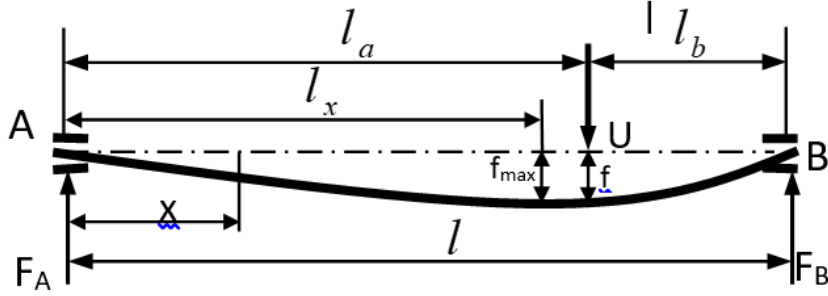
$$F_A = F_B = \frac{F}{2}$$

$$f_{\max} = \frac{F l^3}{48EI}$$

AU arası sehim:

$$f_{AU} = \frac{F x}{48EI} (3l^2 - 4x^2)$$

İki yataklı mil- tekil ara kuvvet



$$l_a > l_b \text{ için } f_{\max} = \frac{F \cdot l_b \sqrt{(l^2 - l_b^2)^3}}{9 \cdot \sqrt{3} \cdot E I l}$$

$$l_b > l_a \text{ için } f_{\max} = \frac{F \cdot l_a \sqrt{(l^2 - l_a^2)^3}}{9 \cdot \sqrt{3} \cdot E I l}$$

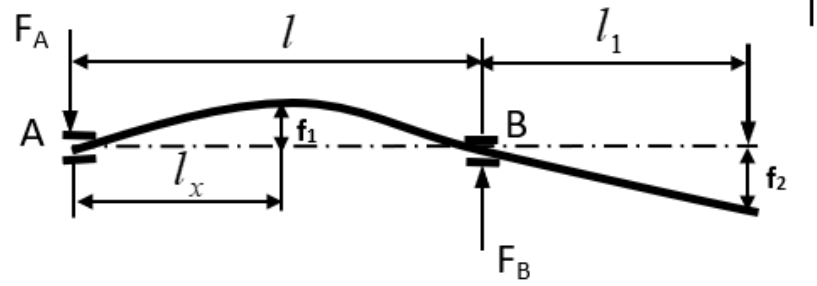
$$f = \frac{F l_a^2 l_b^2}{3 E I l}, \quad f_{AU} = \frac{F l_b x}{6 E I l} (l^2 - l_b^2 - x^2)$$

$$f_{UB} = \frac{F \cdot l_a \cdot (l - x)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} (2 l \cdot x - l_a^2 - x^2),$$

$$l_a > l_b \text{ için } f_{\max} = f \frac{l + l_b}{3 l_b} \sqrt{\frac{l + l_b}{3 l_a}}, \quad l_x = l_a \sqrt{\frac{l + l_b}{3 l_a}},$$

$$l_b > l_a \text{ için } f_{\max} = f \frac{l + l_a}{3 l_a} \sqrt{\frac{l + l_a}{3 l_b}}, \quad l_x = l_b \sqrt{\frac{l + l_a}{3 l_b}}$$

İki yataklı çıkmalı mil-çıkma uçta tekil kuvvet

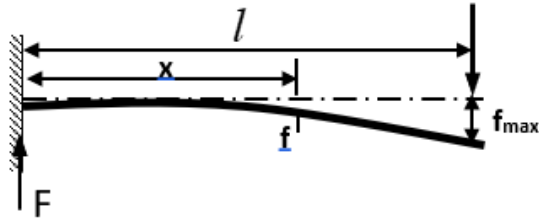


$$F_A = \frac{Fl_1}{l} \quad F_B = \frac{F}{l} (l+l_1)$$

$$f_1 = 0,064 \frac{Fl^2 l_1}{EI} \quad f_2 = \frac{Fl l_1^2}{3EI} \left(1 + \frac{l_1}{l}\right)$$

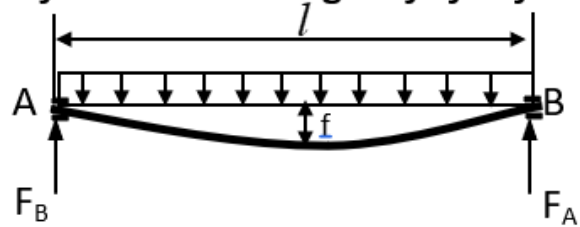
$$l_v = 0,577l$$

Ankastre kiriş- tekil kuvvet



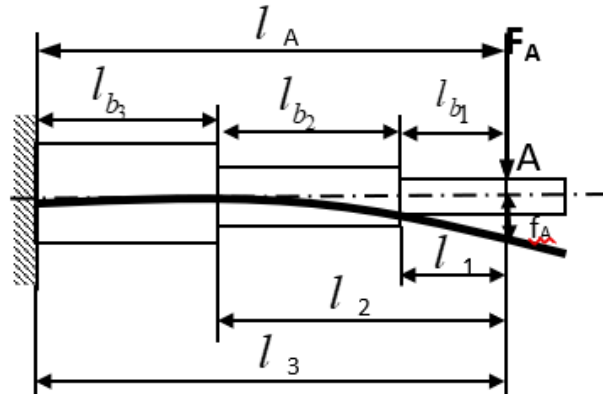
$$f_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI} \quad f = \frac{F \cdot x^2}{6EI} (3l - x)$$

İki uçtan yataklı mil- düzgün yayılı yük



$$F_A = F_B = \frac{ql}{2} \quad f_{\max} = 0,013 \frac{Fl^3}{EI}$$

Bir ucu ankastre kademeli mil – tekil kuvvet



A noktasındaki sehim

$$f_A = \frac{F_A}{3E} \left(\frac{l_1^3}{I_{b_1}} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{I_{b_2}} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{I_{b_3}} \right)$$



QR kod bağlantısında yer alan Güven KUTAY'a ait notları değerlendirebilirsiniz.

Diğer yükleme halleri için sehim hesaplarına ait bağıntılar tablo halinde verilecektir .

Sehim miktarının istenilen sınırları aşması halinde mil rijitliğinin arttırılması gerekir . Rijitlik ; kuvvet altında şekil değiştirme özelliği olduğuna göre ;

$$f = \frac{F * l^3}{48 * E * I} \quad \text{eşitliğinde} \quad \frac{F}{f} = c \text{ (rijitlik)}$$

$$c = \frac{48 * E * I}{l^3} \text{ olur .}$$

$$f = \frac{F}{c} \quad \text{de} \quad c \text{ büyük olursa } f \text{ küçülür.}$$

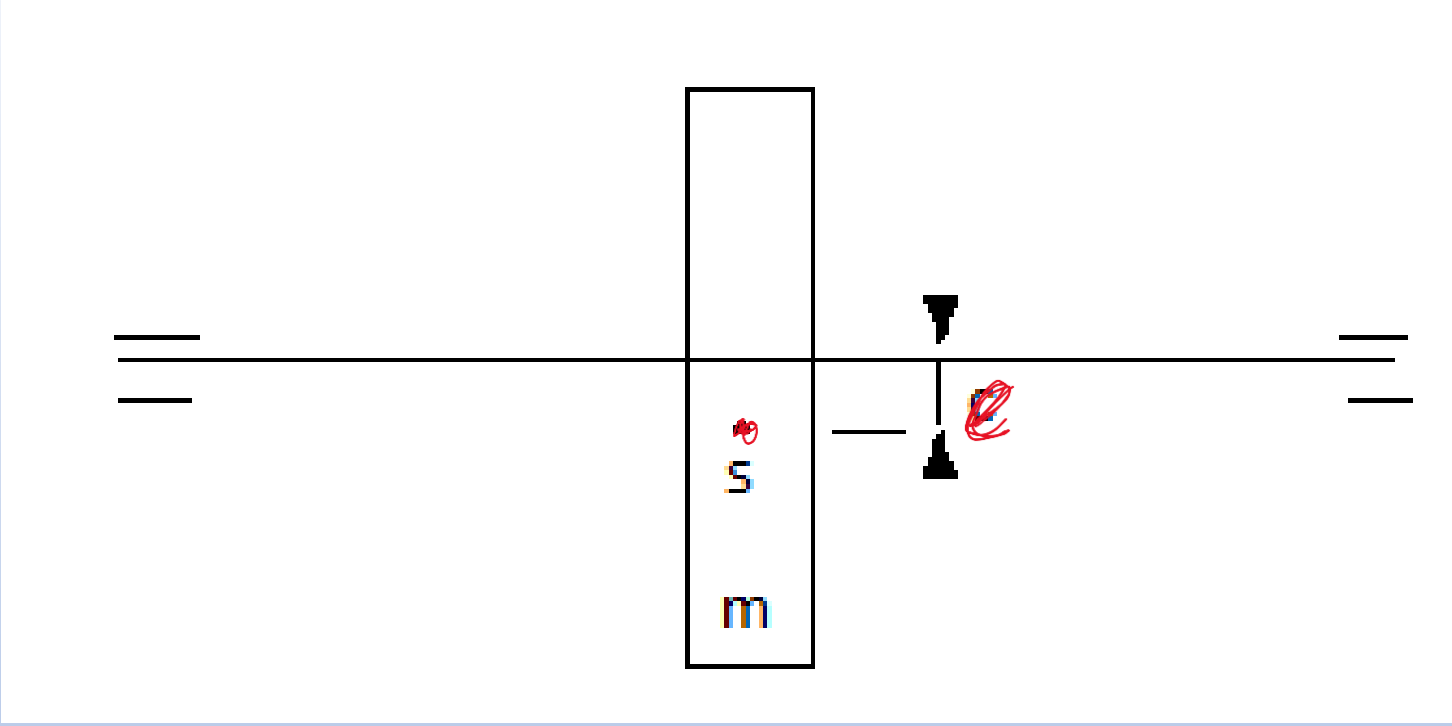
c nin büyük olması **d** çapının büyük olmasına bağlıdır . (Neden acaba?)

Millerde Kritik Devir Sayısı

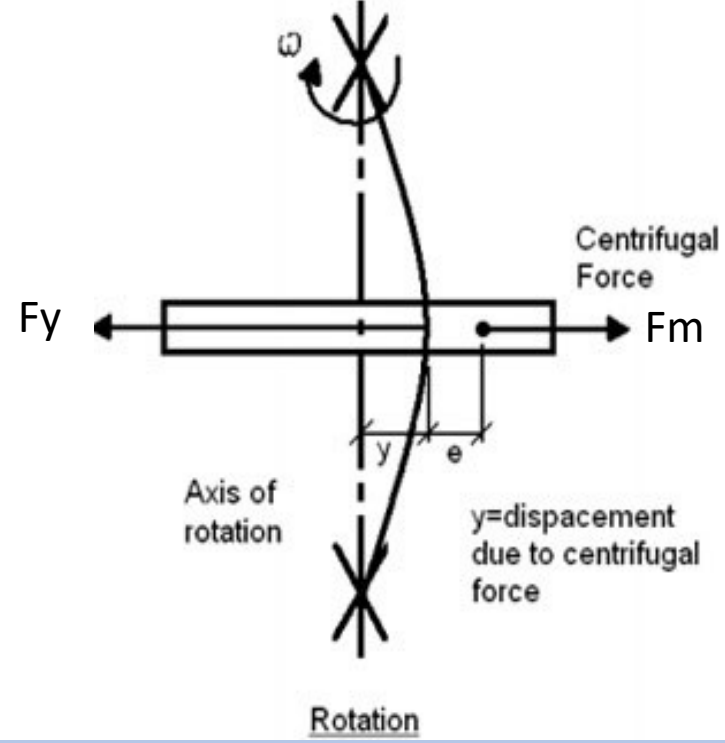
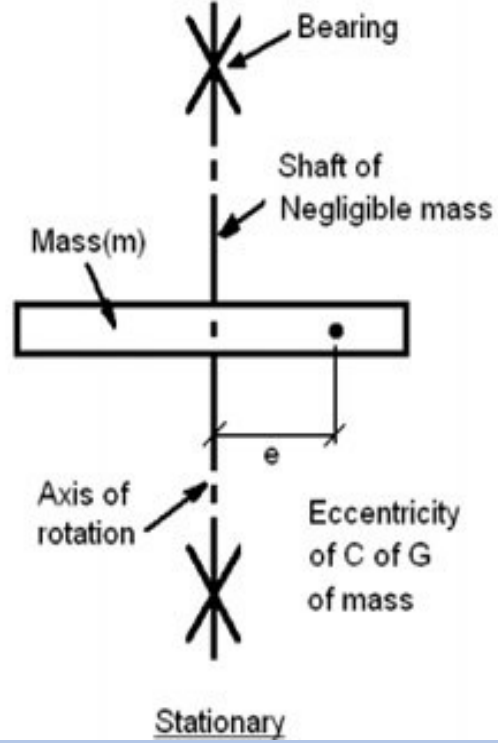
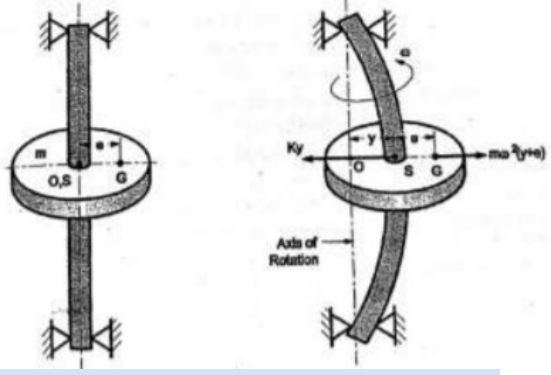
Miller , hem kendi ağırlıkları hem de taşıdıkları dişli çark , kasnak vb. elemanlarının etkisiyle elastik deformasyona uğrarlar.

Titreşen bir sistem oluşturulan miller eğilme ve burulma titreşimleri yaparlar . Titreşen bir sistem uyarıldığında kendi özgül frekansı ile titreşir. Milin dönme hızı bu frekansla çakışırsa (yaylarda olduğu gibi) sistem rezonansa girer , genlik artar ve mil kırılır .

Ağırlığı ihmal edilen bir milin üzerine takılı m kütlelerinde bir diskin (kasnak dişli) ağırlık merkezi «s» imalat ve montaj hatası nedeniyle milin dönme ekseninde «e» kadar mesafede olsun .



Mil hareketsiz m kütlesinin ağırlığı da ihmal edilirse milde eğilme deformasyonu oluşmaz .



Mil dönmekte olup dönme hızına bağlı olarak $F_m = m \cdot r \cdot \omega^2$ büyüklüğünde merkezkaç kuvveti oluşur .

Merkezkaç kuvveti, kuvvetin oluşturduğu y elastik deformasyon ve bu deformasyonla sapmanın aksi yönünde oluşan F_y yay kuvveti denge halinde eşittir.

$$F_y = F_m \quad F_y = c * y \quad c = \text{milin eğilme rijitliği}$$

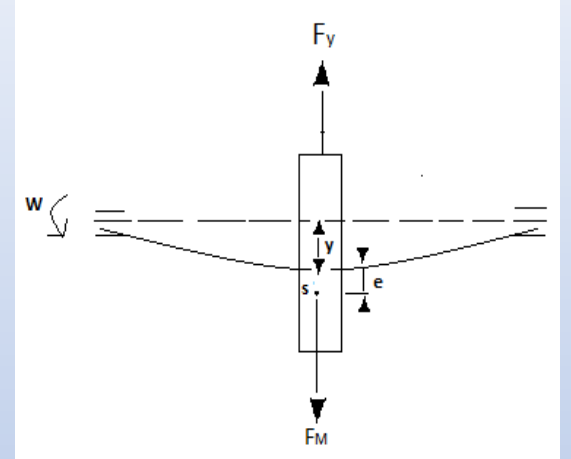
$$c * y = m * (y + e) * w^2$$

Eşitlik y sehimine göre düzenlenirse

$$y = \frac{m * e * w^2}{c - m * w^2} \text{ sonucu elde edilir .}$$

Bu eşitlikle paydadaki $c - m * w^2$ ifadesinde $c = m * w^2$ olursa payda 0 olur ve y sonsuza gider . Bu da milin kırılması demektir.

Paydayı sıfır yapan $w_k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ değerine milin kritik açısal hızı (w_k) denir .



$w_k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ 1/s . Mil bu hızda döndürülmemelidir ve

kritik devir sayısı: $n_k = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$ d / dk

Mildeki sehimin (y) hıza bağlı olarak değişiminin grafik olarak göstermek için aşağıda verilen yöntemle sadeleştirme yapılırsa ;

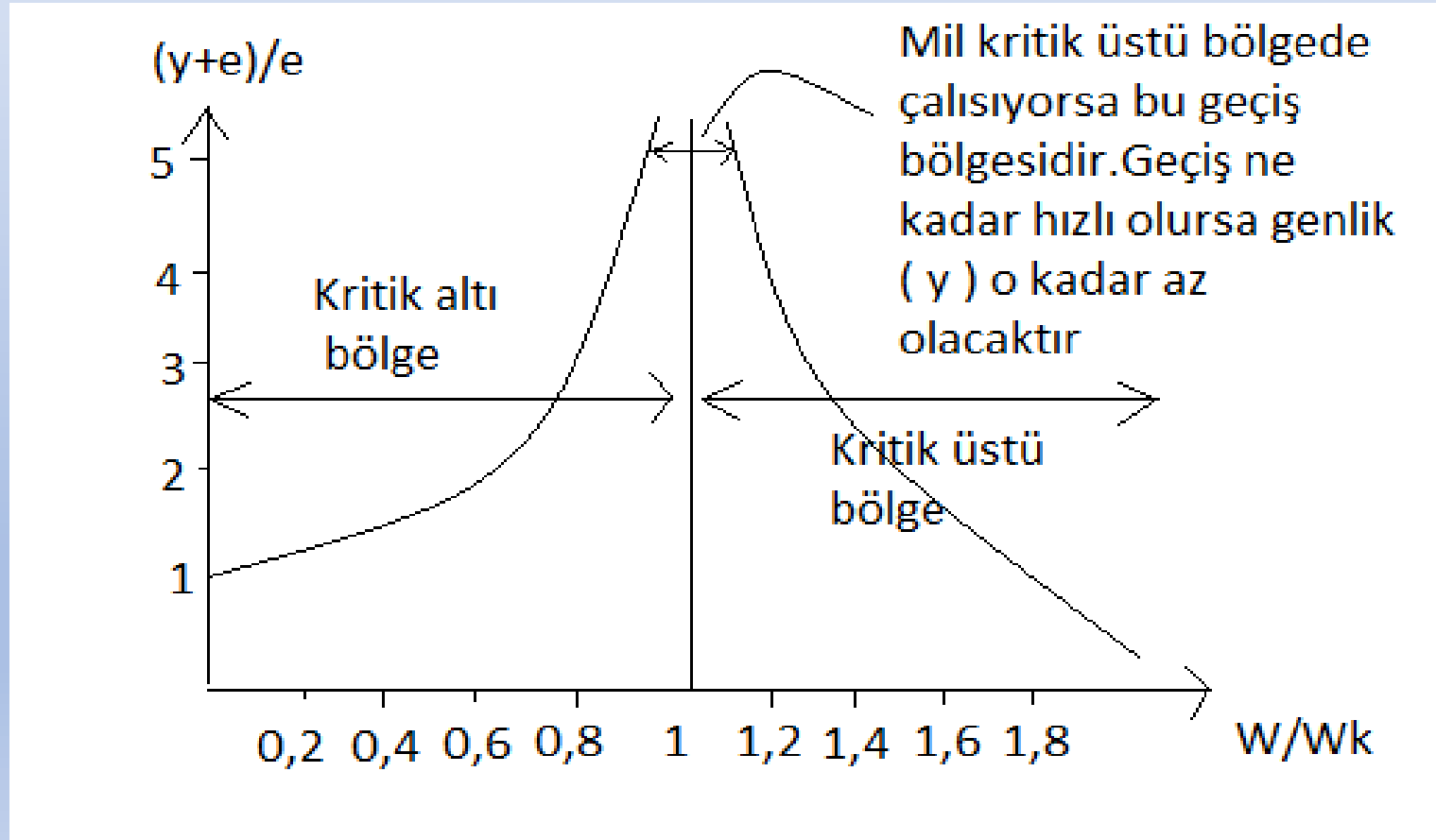
$y+e = x$ olsun ve $\frac{x}{e}$ eşitliğini oluşturalım • $y = \frac{m \cdot e \cdot w^2}{c - m \cdot w^2}$

$$\frac{x}{e} = \frac{y+e}{e} = \frac{\frac{m \cdot e \cdot w^2}{c - m \cdot w^2} + e}{e}$$

$$\frac{y+e}{e} = \frac{m \cdot e \cdot w^2 + e \cdot c - m \cdot e \cdot w^2}{(c - m \cdot w^2) \cdot e}$$

$\frac{y+e}{e} = \frac{c}{c-m*w^2}$ eşitliğinin pay ve paydasını c ye bölersek

$\frac{y+e}{e} = \frac{1}{1-\frac{m*w^2}{c}}$ ve $c = m*w^2$ ile $\frac{y+e}{e} = \frac{1}{1-(\frac{w}{w_k})^2}$ eşitliği elde edilir .



$$\frac{y+e}{e} = \frac{1}{1-\left(\frac{w}{w_k}\right)^2} \quad \text{eşitliğinde teorik olarak } w = \infty \text{ olursa}$$

$$\frac{y+e}{e} = \frac{1}{1-\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{y+e}{e} = 0 \quad \rightarrow \quad y + e = 0 \quad \rightarrow$$

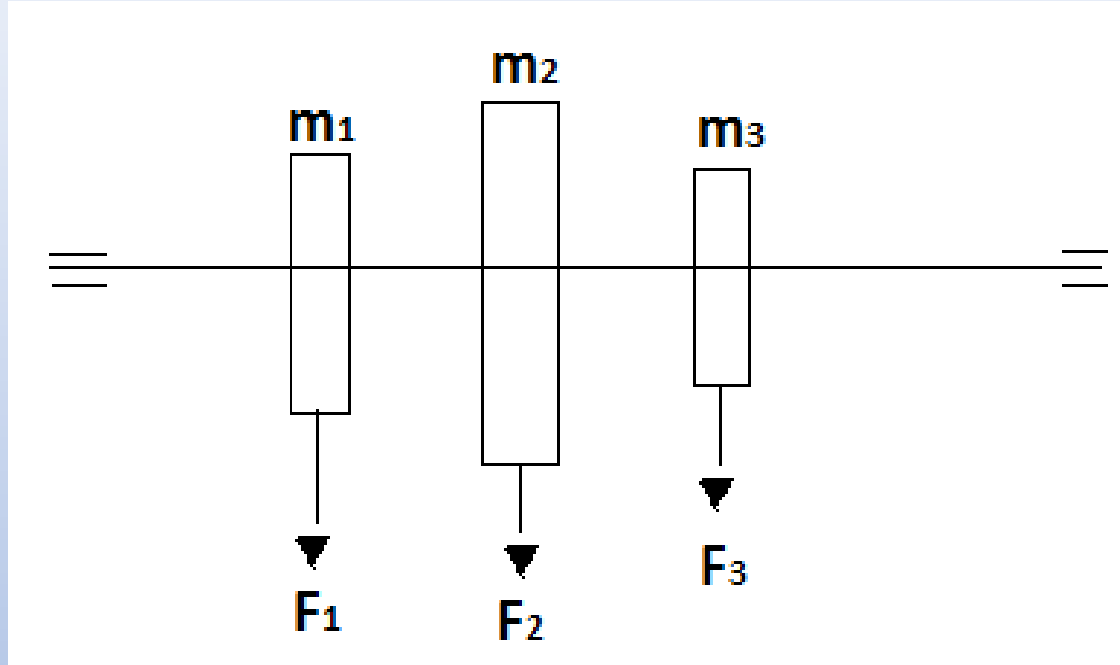
$y = -e$ olur.

Mil kendini dengeler . Yani s ağırlık merkezi dönme eksenine gelir.

Mil kendi ağırlığı etkisiyle de elastik deformasyona maruz kalacaktır. Mil kütlesinin hesaba katılması halinde kritik açısal hız ;

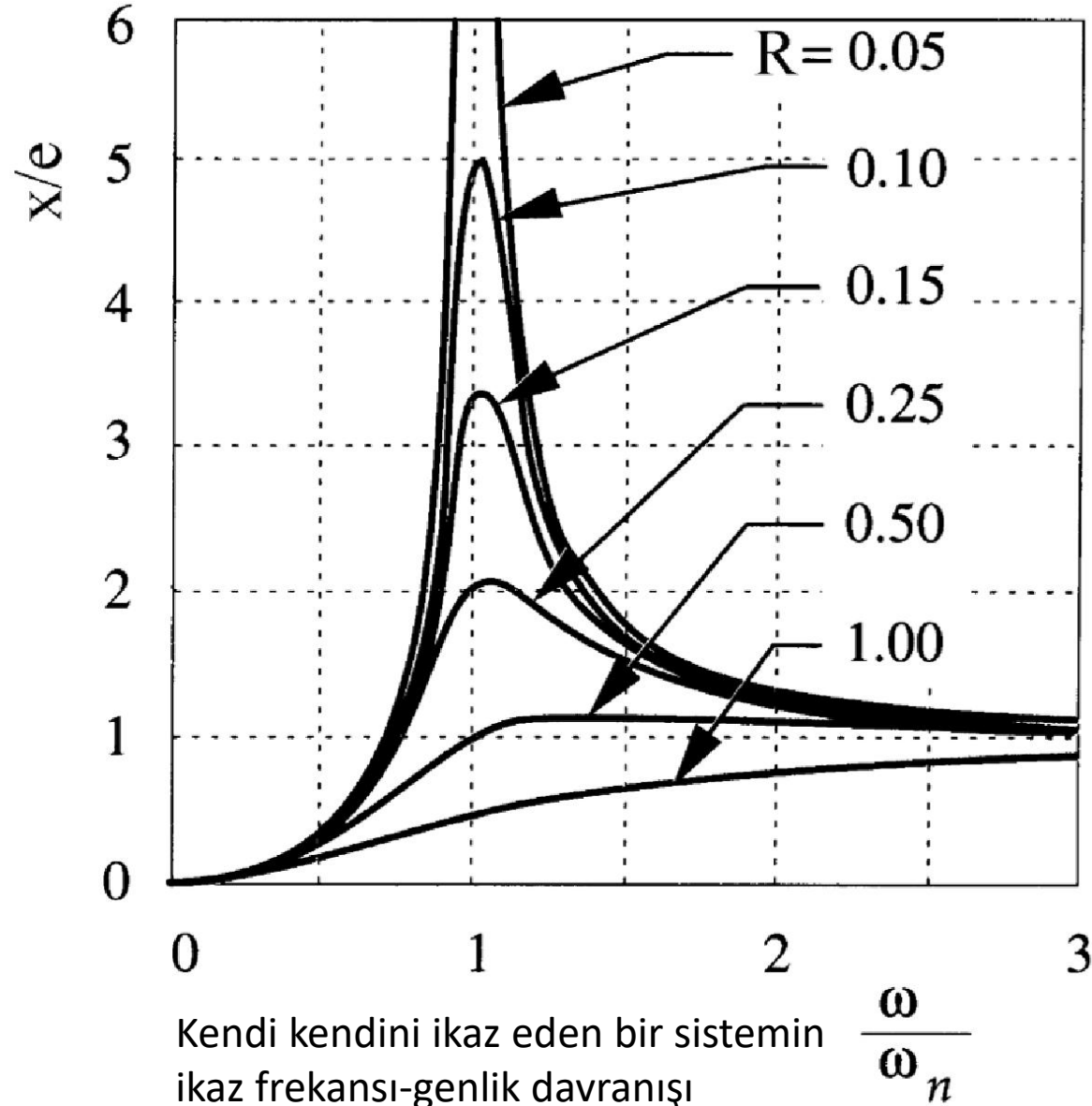
$$w_{km} = \frac{d}{l^2} * 12,61 \times 10^6 \quad (1/s) \quad \text{eşitliği ile hesaplanır.}$$

- Milin üzerinde birden fazla kütle varsa milin kritik devir sayısı aşağıda yazılı bağıntı ile hesaplanır.



$$\frac{1}{w_k^2} = \frac{1}{w_{km}^2} + \frac{1}{w_{k1}^2} + \frac{1}{w_{k2}^2} + \frac{1}{w_{k3}^2}$$

Gerçek devir sayısının bu yöntemle bulunması değerden %4 daha fazla olduğu görülmüştür.



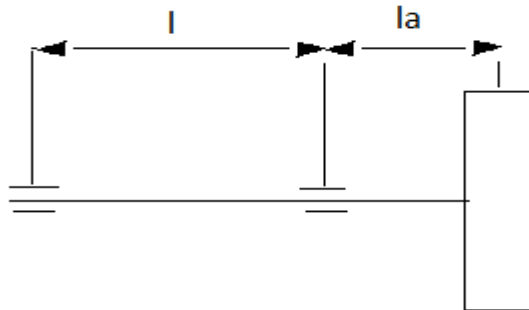
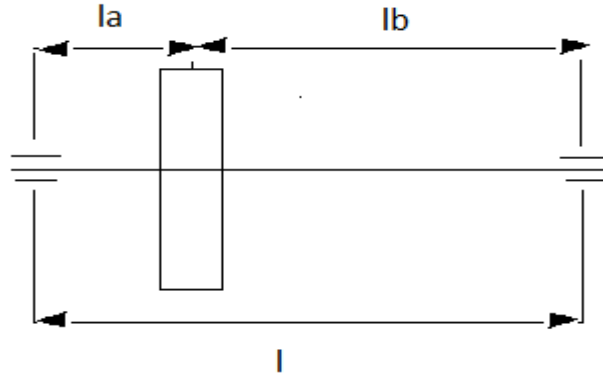
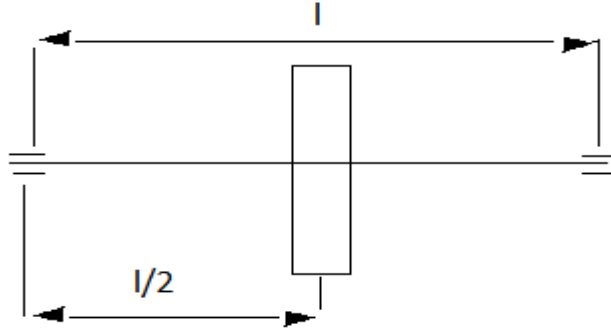
Kendi kendini ikaz eden bir sistemin
ikaz frekansı-genlik davranışı
(R: sönüm oranı)

Sistemde ikaz frekansı milin dönme hızına eşittir ve açısal frekans cinsinden $\omega=2\pi n/60$ olacaktır.

İkaz frekansı – genlik davranışı (cevabı)
boyutsuz büyüklükler ile yandaki şekilde grafik olarak verilmiştir.

Sistemde yataklar başta olmak üzere sönüm yaratacak çeşitli etkiler söz konusu olduğundan diyagramlar çeşitli sönüm oranları için çizilmiştir.

$w_k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ eşitliğinde milin rijitliği c , farklı yükleme şekilleri için hesaplanması aşağıda verilmiştir.



$$c = \frac{48 * E * I}{l^3} \text{ (N/mm)}$$

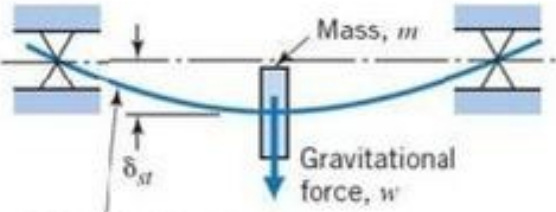
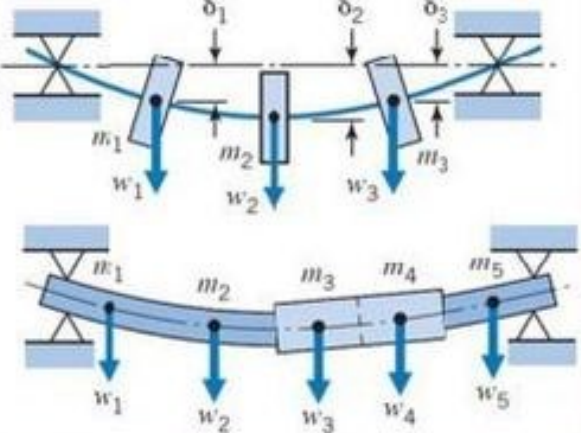
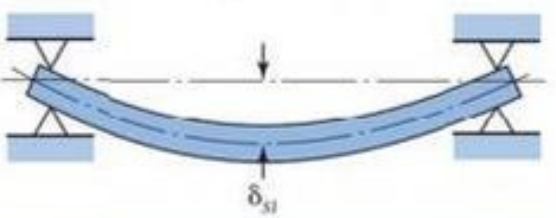
Bu eşitlik sehim için verilen

$$f = \frac{F * l^3}{48 * E * I} \text{ bağıntısı ile } \frac{F}{f} = c$$

dönüşümü yapılarak elde edilebilir.

$$c = \frac{3 * E * I * l}{l_a^2 * l_b^2} \text{ (N/mm)}$$

$$c = \frac{3 * E * I}{l_a^2 * (l + l_a)} \text{ (N/mm)}$$

Configuration	Critical Speed Equation
(a) Single mass  Mass, m Gravitational force, w Static deflection, δ_{st} Shaft of spring rate $k = w/\delta_{st}$	$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{w}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \quad (17.1)$ $n_c = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{kg}{w}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \quad (17.1a)$
(b) Multiple masses 	$\left. \begin{aligned} n_c &\approx \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g(w_1\delta_1 + w_2\delta_2 + \dots)}{w_1\delta_1^2 + w_2\delta_2^2 + \dots}} \\ n_c &\approx \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \sum w\delta}{\sum w\delta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$
(c) Shaft mass only  Static deflection, δ_{st}	$\omega_n \approx \sqrt{\frac{5g}{4\delta_{st}}} \quad (17.3)$

Kaynaklar

- Fatih Babalık-Kadir Çavdar, Makine Elemanları ve Konstrüksiyon Örnekleri, Dora yayıncılık
- Mustafa Akkurt, Makine Elemanları Cilt I, Birsen Yayınevi
- Hikmet RENDE, Makine Elemanları I, Birsen Yayınevi
- Matematiksel.org
- <http://www.morseairsystems.com.au/news-critical-speed-of-shafts.html>